

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO – USP
ESCOLA DE ENGENHARIA DE LORENA

RONALDO OLIVEIRA CAMACHO FILHO

**Estudo de modelos cosmológicos alternativos e análise do
gás de Chaplygin no contexto de expansão do Universo**

Lorena – SP

2020

RONALDO OLIVEIRA CAMACHO FILHO

**Estudo de modelos cosmológicos alternativos e análise do
gás de Chaplygin no contexto de expansão do Universo**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Escola de Engenharia de Lorena – Universidade de São Paulo como requisito parcial para conclusão da Graduação do curso de Engenharia Física.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Bertha Cuadros-Melgar.

Lorena – SP

Dezembro de 2020

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha Catalográfica
EEL USP

Camacho, Ronaldo

Estudo de modelos cosmológicos alternativos e análise do gás de Chaplygin no contexto de expansão do Universo./ Ronaldo Oliveira Camacho Filho; orientadora Bertha Cuadros-Melgar. - Lorena, 2020.

70 p.

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Escola de Engenharia de Lorena - Universidade de São Paulo.

1. Cosmologia 2. Relatividade Geral 3. Gás de Chaplygin
4. Matéria Escura 5. Energia Escura I. Título.

Agradecimentos

Acredito que essa seja a parte mais difícil do trabalho, já que não sou particularmente bom nesse sentido e por isso busco fazer da forma mais simples possível. Acho válido um agradecimento ao Departamento de Engenharia de Materiais que por muitos anos foi praticamente uma casa pra mim. Tudo que aprendi ao longo desses anos de faculdade estão muito além do conhecimento acadêmico e isso em parte se deve ao Departamento. Por participar de diversas entidades e colegiados, adquiri um conhecimento burocrático e prático da vida acadêmica e de como realmente funciona uma universidade. Diversos personagens participaram desse aprendizado em muitas reuniões, conversas e discussões. Um desses personagens julgo ser mais importante que todos os outros e, não a toa, é minha orientadora para esse trabalho.

O que eu aprendi com a professora Bertha está muito além das aulas de Física III e IV ou das pesquisas que desenvolvemos. Ao longo dos anos discutimos muito sobre o ambiente acadêmico, diversos professores, universidades, entre outros assuntos que de certa forma moldaram parte do meu caráter e guiaram minha conduta durante boa parte da graduação. É natural, já que começamos nosso trabalho em 2016, pouco depois de eu entrar deslumbrado com a faculdade. Hoje, alguns anos depois, a maturidade já é outra embora o deslumbre seja o mesmo. Agradeço por todos esses anos de ensinamentos e conversas ao longo dos quais aprendi muito sobre vários assuntos e finalizo minha graduação ansioso pelos nossos próximos anos de colaboração.

Além da professora Bertha, que praticamente me adotou por alguns anos, devo agradecer imensamente à minha mãe, Adriana. Ao longo de toda a minha vida ela sempre me apoiou e fez de tudo para que eu realizasse meus sonhos. Nem sempre foi fácil, mas ela sacrificou tudo o que podia para que eu estivesse aqui. Ainda lembro do momento em que eu decidi fazer Engenharia Física na USP e ela me perguntou se não havia nenhum outro curso no Rio que eu gostaria de fazer. Minha resposta foi simples e direta: “ou eu faço Engenharia Física ou eu não faço faculdade”. Sem perguntar duas vezes ela se planejou e graças a ela tive como me sustentar ao longo da graduação. Palavras jamais serão suficientes para agradecê-la por tudo que me proporcionou, de modo que só me resta esperar para retribuir tanta dedicação com os frutos do meu trabalho.

E un ringraziamento speciale a quella che è sempre riuscita a portare via le mie tempeste interiori, nelle parole di Carl Sagan: davanti alla vastità dello spazio e l'immensità del tempo, è una gioia poter condividere un pianeta e un tempo col mio piccolo arcobaleno.

*“[...] No fundo do mar, todas as moléculas
repetem os padrões umas das outras
até formarem padrões novos e complexos.
Esses padrões fazem outros como eles...
e uma nova dança começa.
Crescem em tamanho e complexidade...
coisas vivas, massas de átomos, DNA e proteína...
dançam num padrão ainda mais intrincado.
Saído do berço, em terra firme...
ali está ele de pé...
átomos com consciência...
matéria com curiosidade.
Em pé junto ao mar...
assombra-se com assombro...
Eu... um universo de átomos...
um átomo no universo.”*

Richard Feynman, *The Value of Science* (1955).

Resumo

CAMACHO, R. O. **Estudo de modelos cosmológicos alternativos e análise do gás de Chaplygin no contexto de expansão do Universo**. 2020. 70 p. Monografia (Trabalho de Graduação de Engenharia Física) – Escola de Engenharia de Lorena, Universidade de São Paulo, Lorena, 2020.

As evidências em favor da atual aceleração do nosso Universo são bastante consistentes com o modelo de concordância conhecido como Λ CDM, embora esse modelo não seja capaz de solucionar vários problemas cosmológicos no âmbito teórico. Assim, é necessário buscar novos modelos mais adequados a resolverem esses problemas, considerando também o setor escuro, que constitui quase 95% do conteúdo de matéria e energia do Universo. Dentre as diversas formas de encontrarmos esses modelos, o presente trabalho busca utilizar o formalismo ADM para modificar o lado esquerdo das equações de Einstein propondo uma ação com galileon, bem como utilizar um outro modelo baseado na modificação do lado direito, conhecido como gás de Chaplygin, que introduz um fluido com uma equação de estado particular com forte potencial para unificar o setor escuro. Ambos os modelos propostos adequam bem os dados disponíveis de supernovas e se baseiam em métodos diferentes para explicar a expansão do Universo, o que nos dá um ponto de vista bem amplo das possibilidades a serem exploradas nessa área.

Palavras-chave: Cosmologia. Matéria Escura. Energia Escura. Modelos Cosmológicos. Gás de Chaplygin.

Abstract

CAMACHO, R. O. **Study of alternative cosmological models and analysis of the Chaplygin Gas in the context of the expansion of the Universe.** 2020. 70 p. Monograph (Undergraduate Thesis in Engineering Physics) – Engineering School of Lorena, University of São Paulo, Lorena, 2020.

The evidence in favor of the current acceleration of our Universe is quite consistent with the concordance model known as Λ CDM, although this model is not capable of solving several cosmological problems at the theoretical level. Thus, it is necessary to seek new models that are more adequate to solve these problems, also considering the dark sector, which constitutes almost 95% of the matter and energy content of the Universe. Among the various ways to find these models the present work aims to use the ADM formalism to modify the left-hand side of Einstein's equations by proposing an action with galileon. In addition, we analyze another model based on the modification of the right-hand side, known as the Chaplygin gas, which introduces a fluid with a particular equation of state with strong potential to unify the dark sector. Both proposed models are in agreement with the available data from supernovae and are based on different methods to explain the expansion of the Universe, what gives a very broad view of the possibilities to be explored in this area.

Keywords: Cosmology. Dark Matter. Dark Energy. Cosmological Models. Chaplygin Gas.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
2	REVISÃO TEÓRICA	17
2.1	Curvatura e Equações de Einstein	17
2.2	O Universo de Friedmann-Robertson-Walker	24
2.2.1	Evolução do fator de escala	28
2.2.2	Inflação	30
2.2.2.1	Solução do problema do horizonte	32
2.2.2.2	Solução do problema da planaridade	32
2.2.2.3	Inflação e campos escalares	33
2.2.2.4	Modelos inflacionários	34
2.2.3	Modelos Cosmológicos Alternativos	36
2.3	Interação entre matéria escura e energia escura	37
2.3.1	Modelo de Concordância	38
2.3.1.1	Modelos interativos de matéria escura e energia escura	38
2.3.1.2	Modelo de fluido	39
2.4	Formalismo ADM	41
2.4.0.1	Folheação do espaço-tempo e geometria de hipersuperfícies	41
2.4.0.2	Geometria extrínseca e intrínseca	43
2.4.0.3	As equações de Gauss-Codazzi	43
2.4.0.4	Densidade Lagrangiana	44
2.4.0.5	Densidade Hamiltoniana	45
2.4.0.6	Restrições e equações de movimento	47
3	RESULTADOS	49
3.1	Modelos alternativos analisados	49
3.1.1	Modelo da literatura	49
3.1.2	Modelo com Galileons	52
3.2	O gás de Chaplygin	55
3.2.1	O gás de Chaplygin na cosmologia FRW	56
3.2.1.1	Concordância com as observações da aceleração cósmica	57
3.2.2	Análise da viabilidade do modelo pelos parâmetros <i>statefinder</i>	59
3.2.2.1	Gás de Chaplygin generalizado	62
4	CONCLUSÃO	65

REFERÊNCIAS	67
--------------------	-----------

1 Introdução

As Físicas teórica e experimental sempre andaram lado a lado, uma vez que a experiência é fundamental para validar as diversas hipóteses propostas pela teoria. Na Cosmologia não seria diferente, porém o fato de estudarmos o Universo em si impõe uma dificuldade a mais na aquisição de dados, de modo que o desenvolvimento tecnológico se faz ainda mais importante para essa área da Física.

A grande maioria de dados utilizados na Cosmologia são provenientes de supernovas, o que torna essa aquisição relativamente complicada. Por esse motivo, as previsões cosmológicas de diversos modelos se mantiveram no campo hipotético durante muitas décadas, já que tais dados eram escassos. Atualmente, temos à nossa disposição um conjunto de informações privilegiado que nos possibilita validar nossos modelos com uma precisão bastante boa, o que permitiu o desenvolvimento da Cosmologia a novos patamares.

Para entender melhor a importância da tecnologia nessa história basta olharmos para os primeiros modelos cosmológicos que tivemos. O chamado Modelo Padrão de Cosmologia visava explicar como o Universo se expandia bem como tentava explicar qual seria seu futuro. As três principais possibilidades ficaram muito famosas no domínio público, sendo elas: o Universo se expandiria até certo ponto a partir do qual a gravidade resultante do seu conteúdo de matéria iria sobrepor a expansão e o Universo começaria a encolher; o Universo continuaria se expandindo até atingir uma velocidade limite, ponto no qual ele se expandiria para sempre com uma velocidade constante; e o Universo continuaria se expandindo cada vez mais rápido, isto é, sua expansão seria acelerada. É bastante evidente que seria impossível decidir qual é a hipótese mais válida sem os dados que nos informam o comportamento do Universo.

Atualmente, esses dados estão disponíveis de várias formas, porém a principal observação que deu um rumo novo à Cosmologia foi a de que as galáxias estão se afastando umas das outras a uma velocidade cada vez maior. Isso indica que a terceira hipótese - a expansão acelerada - é uma das mais prováveis. Além disso, o cálculo da densidade do Universo também permite descartar a primeira hipótese, uma vez que não há matéria suficiente no Universo para que seu efeito gravitacional sobreponha a expansão. Essa descoberta foi, de fato, uma novidade, pois os pesquisadores da época tinham indícios da expansão mas ninguém acreditava que sua velocidade estaria aumentando cada vez mais. Assim, por muitos anos buscou-se entender o que poderia estar causando esse efeito acelerador e a resposta para isso nos trouxe mais questionamentos do que soluções propriamente ditas.

Curiosamente, a resposta para a expansão acelerada estava na própria Relatividade

Geral, isto é, nas equações de Einstein. Na relatividade, essa expansão acelerada é causada por uma nova componente da densidade de energia com pressão negativa. Por não sabermos exatamente o que é essa componente, decidiu-se chamá-la de energia escura. Esse termo, juntamente com a matéria escura, ficou muito famoso na comunidade científica bem como entre a população em geral. É preciso esclarecer, entretanto, que a energia escura não está associada propriamente à matéria escura, como muitos acreditam. Ela é um resultado direto da relatividade e, embora não saibamos exatamente o que ela é, sabemos quais são suas propriedades, o que nos permite desenvolver modelos cosmológicos que visam explicar o comportamento do Universo.

Ainda que o conceito de matéria escura tenha surgido em um contexto diferente, sua participação nos modelos cosmológicos não é menos importante. O fato de o Universo ser constituído majoritariamente por matéria e energia escuras são um grande indício da importância dessas quantidades. Sendo assim, vários modelos foram propostos nos quais o setor escuro interage ou não entre si, visando entender exatamente qual é sua participação na dinâmica do Universo. Esses modelos ficaram conhecidos como Modelos Cosmológicos Alternativos, que buscam solucionar os principais problemas deixados pelos modelos padrões (que não incluem o setor escuro).

É nesse contexto que introduzimos nosso principal objeto de estudo: a análise da expansão do Universo por meio de um modelo que englobe o setor escuro. As duas maneiras optadas para realizar essa modelagem foram a modificação do lado esquerdo das equações de Einstein usando um modelo com galileon e a modificação do lado direito usando um fluido com equação de estado particular. O primeiro método nos permite expressar nosso universo como um fluido unificado que se comporta como matéria escura em épocas iniciais e intermediárias, e como energia escura em épocas distantes, uma vez que utilizamos uma ação com simetria de translação. O segundo método nos oferece um fluido exótico, conhecido como gás de Chaplygin, que introduz no nosso modelo uma equação de estado que tem consequências muito interessantes para o cenário cosmológico. Do ponto de vista observacional, discute-se que esse gás pode unificar o setor escuro, o que é resultado do comportamento geral de sua equação de estado: ela pode se comportar como matéria em pequenas escalas e como uma componente da energia escura com pressão negativa em grandes escalas.

Dessa forma, esse trabalho se propõe a explorar as consequências de incluir a equação de estado proposta pelo gás de Chaplygin nos modelos cosmológicos alternativos, visando encontrar as melhores explicações para os dados disponíveis, bem como analisar alguns modelos cosmológicos importantes cujas ações possuem simetria de translação, comparando seus resultados com modelos já bem estabelecidos na Cosmologia.

Objetivos

Os objetivos deste trabalho consistem em estudar os principais modelos alternativos de cosmologia visando entender o papel da energia escura na expansão do Universo. Mais especificamente, são estudados os modelos que incluem o gás de Chaplygin para explicar a expansão acelerada apontada pelos dados observacionais disponíveis e os modelos cujas ações apresentam simetria de translação, em particular um modelo com galileon.

Metodologia

Para o desenvolvimento deste trabalho, foram utilizados o cálculo simbólico usual em Relatividade Geral, bem como alguns formalismos comumente utilizados em Cosmologia. Também utilizou-se *softwares* de cálculo simbólico, como *Mathematica* e *Maple*, como ferramentas auxiliares no desenvolvimento dos cálculos.

2 Revisão Teórica

Neste capítulo, revisaremos alguns conceitos e ferramentas que serão necessários para a compreensão do presente trabalho. A não ser quando explicitado, utilizamos unidades geometrizadas em que $G = k_B = c = \hbar = 1$. Essas unidades naturais nos permitem simplificar os cálculos e podem ainda ser usadas para derivar outras quantidades em um sistema normalizado, seguindo a Tabela 1. Ademais, em todo o trabalho será utilizada a notação de Einstein, que nos oferece uma forma prática de expressar somatórias. Assim, quando temos uma expressão $\sum_j A_{ij}x^j$ que considera a soma sobre todos os valores de j , por exemplo, vemos que o índice j sempre se repetirá, já que a soma está sobre ele, o que nos permite omitir a somatória. Dessa forma, teremos que $\sum_j A_{ij}x^j \equiv A_{ij}x^j$.

Tabela 1 – Dimensão das unidades utilizadas.

Constante	Símbolo	Dimensão
Velocidade da luz no vácuo	c	$[L][T]^{-1}$
Constante de Planck reduzida	$\hbar$	$[L]^2[M][T]^{-1}$
Constante da Gravitação	G	$[L]^3[M]^{-1}[T]^{-2}$
Permissividade no vácuo	ε_0	$[L]^{-3}[M]^{-1}[T]^2[Q]^2$
Constante de Boltzmann	k_B	$[L]^2[M][T]^{-2}[\Theta]^{-1}$

Fonte: Autor.

2.1 Curvatura e Equações de Einstein

Um dos conceitos principais em Relatividade é o de variedade: um espaço contínuo que, localmente, se parece muito com o espaço euclidiano. Essa variedade pode ser parametrizada continuamente de modo que o número de parâmetros independentes é a sua dimensão e os parâmetros são as suas coordenadas. Dessa maneira, podemos pensar em uma variedade como um espaço com coordenadas que localmente parece o espaço euclidiano mas que globalmente pode ser curvo, dobrar ou fazer qualquer outra coisa desde que permaneça contínuo.

Aqui, a variedade que nos interessa é a riemanniana, mas antes de definí-la devemos entender o conceito de variedade diferenciável, que são espaços contínuos e diferenciáveis. Podemos pensar nisso como um espaço no qual na vizinhança de cada ponto da variedade é possível definir um mapa suave para o espaço euclidiano que preserva derivadas de funções escalares naquele ponto. Assim, uma variedade riemanniana é uma variedade diferenciável na qual um campo tensorial simétrico $\mathbf{g}$ do tipo $\binom{0}{2}$ foi escolhido para agir

como a métrica em cada ponto. É importante notar que a métrica adiciona uma certa estrutura à variedade, isto é, ela define a curvatura da variedade.

O conceito de curvatura é, por sua vez, primordial em Relatividade. Primeiramente, devemos fazer uma distinção quanto aos tipos de curvatura, isto é, intrínseca e extrínseca. A geometria intrínseca de uma variedade considera a relação entre seus pontos em caminhos que se mantêm na própria variedade. A curvatura extrínseca se baseia na noção de dimensões maiores do espaço. Esse conceito pode ser facilmente compreendido através de um exemplo: um cilindro. Como o cilindro é redondo em uma direção tendemos a pensar que seja curvo. Essa, todavia, é sua curvatura extrínseca, que tem relação com o espaço tridimensional do qual é parte. No entanto, um cilindro pode ser obtido enrolando um pedaço de papel plano sem rasgá-lo ou amassá-lo. Então, sua geometria intrínseca é a mesma do papel: plana. É importante notar que a distância entre dois pontos na superfície do cilindro é a mesma distância na folha de papel original, isto é, linhas paralelas continuam paralelas e todos os axiomas euclidianos continuam válidos.

Essa diferenciação no conceito de curvatura parece um pouco estranha *a priori* porque estamos muito familiarizados com a geometria plana. No nosso estudo diário, por exemplo, estamos acostumados com a ideia de linhas retas. Esse é um conceito bem simples definido na geometria euclidiana e utilizado com grande naturalidade. Em relatividade, porém, nosso espaço é curvo e por isso precisamos definir um conceito satisfatório de “linha reta”. Uma linha reta no espaço euclidiano é uma linha que continua percorrendo o mesmo caminho que percorria antes, isto é, a tangente à curva em um ponto é paralela à tangente no ponto anterior (SCHUTZ, 2009). Em um espaço curvo nós podemos também escrever linhas que são o “mais retas possíveis” e para isso pedimos transporte paralelo do vetor tangente. Tais linhas são chamadas geodésicas e escrevemos

$$\nabla_{\vec{U}} \vec{U} = 0, \quad (2.1)$$

onde $\vec{U}$ é um vetor tangente à geodésica. Se tomarmos λ como um parâmetro da curva, teremos $U^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$ e $U^\beta \partial/\partial x^\beta = d/d\lambda$, de modo que podemos escrever a equação da geodésica na forma

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right) + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (2.2)$$

Na eq. (2.2) vemos um símbolo novo: $\Gamma_{\mu\beta}^\alpha$. Esse é o chamado símbolo de Christoffel, utilizado para denotar os coeficientes da combinação linear dos vetores da base do vetor $\partial \vec{e}_\alpha / \partial x^\beta$:

$$\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \vec{e}_\mu. \quad (2.3)$$

Assim, $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \vec{e}_\mu$ nos dá a μ -ésima componente de $\partial \vec{e}_\alpha / \partial x^\beta$. Esse símbolo pede apenas três índices: (α) nos diz qual vetor da base está sendo diferenciado; (β) nos diz a coordenada com relação a qual estamos diferenciando; e (μ) denota a componente do vetor resultante.

Uma outra grande vantagem dos símbolos de Christoffel está na forma como eles se relacionam com tensores e, portanto, com a métrica. Uma equação em particular que será útil nesta seção nos mostra que

$$\nabla_\beta T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu,\beta} - T_{\alpha\nu}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha - T_{\mu\alpha}\Gamma_{\nu\beta}^\alpha, \quad (2.4)$$

onde ∇ indica a derivada covariante da qual falaremos mais adiante. Ademais, podemos mostrar que a métrica obedece uma propriedade importante com relação a referenciais, isto é,

$$g_{\alpha'\mu';\beta} \equiv 0, \quad (2.5)$$

em todos os sistemas de coordenadas. O ponto e vírgula na eq. (2.5) é uma notação alternativa da chamada derivada covariante. A ideia dessa derivada está muito ligada ao espaço curvo da Relatividade. Isso porque, por definição, a derivada de um campo vetorial envolve a diferença de vetores em dois pontos (no limite em que os pontos se aproximam) (SCHUTZ, 2009). Em um espaço curvo, porém, a noção de diferença entre vetores em pontos diferentes deve ser vista com cautela pois entre os pontos o espaço é curvo e a ideia de um limite no qual os pontos se tornam um pode ser confusa. Devemos então introduzir um conceito que resolva essa confusão, e é para isso que temos a derivada covariante. Uma expressão que leva em consideração a variação dos vetores da base ao longo de uma curva é a seguinte:

$$\frac{d\vec{A}}{d\lambda} = \frac{dA^\mu}{d\lambda}\vec{e}_\mu + A^\mu \frac{d\vec{e}_\mu}{d\lambda}, \quad (2.6)$$

onde λ é um parâmetro da curva. Essa é uma forma bastante útil de visualizar a variação das componentes da base, mas queremos aqui estabelecer uma forma ainda mais poderosa. Para isso, fazemos uso das notações de Einstein e, após algumas manipulações de (2.6), obtemos

$$A^\mu_{;\nu} \equiv A^\mu_{,\nu} + A^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\mu, \quad (2.7)$$

onde $\vec{A}$ é um campo vetorial qualquer. Analogamente, podemos obter as expressões:

$$P_{\alpha;\beta} = P_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu P_\mu \quad (2.8)$$

$$T^{\alpha\beta}_{;\gamma} = T^{\alpha\beta}_{,\gamma} + \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha T^{\mu\beta} + \Gamma_{\mu\gamma}^\beta T^{\alpha\mu}. \quad (2.9)$$

Assim, usando a eq. (2.4) temos

$$g_{\alpha\beta;\mu} = g_{\alpha\beta,\mu} - \Gamma_{\alpha\mu}^\nu g_{\nu\beta} - \Gamma_{\beta\mu}^\nu g_{\alpha\nu}. \quad (2.10)$$

Da conclusão de (2.5) e da eq. (2.10) podemos fazer algumas manipulações de modo a obter

$$\frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}(g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}) = \Gamma_{\beta\mu}^\gamma, \quad (2.11)$$

uma forma simples de calcular os símbolos de Christoffel a partir da métrica.

A seguir devemos definir algumas quantidades importantes para os cálculos futuros, em particular, tensores de grande valor para nosso estudo. O primeiro que vamos definir é o tensor de curvatura de Riemann $\mathbf{R}$, que é um tensor $\binom{1}{3}$ e cujas componentes são dadas por

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} := \Gamma^\alpha_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\beta\mu}. \quad (2.12)$$

Como vimos, os símbolos de Christoffel podem ser obtidos a partir da métrica, de modo que o tensor de curvatura também possuirá uma forma que depende apenas da métrica, isto é,

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} := g_{\alpha\lambda}R^\lambda_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\nu,\beta\mu} - g_{\alpha\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\alpha\nu} - g_{\beta\nu,\alpha\mu}). \quad (2.13)$$

Essa forma é vantajosa pois nos facilita visualizar as seguintes identidades:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (2.14)$$

$$0 = R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta}, \quad (2.15)$$

que reduzem o número de componentes independentes de $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ para 20, em quatro dimensões. Esse é o mesmo número de $g_{\alpha\beta,\mu\nu}$, de modo que $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ caracteriza a curvatura do espaço de uma maneira tensorial. Dessa forma, um método simples para verificar a existência de curvatura é calcular as componentes do tensor de Riemann, uma vez que

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \text{variedade plana.} \quad (2.16)$$

Olhando mais uma vez para as componentes de $\mathbf{R}$ podemos diferenciá-las com relação à x^λ e analisá-las em um sistema de coordenadas localmente inerciais. Dessa análise e de algumas manipulações podemos chegar a seguinte equação:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0, \quad (2.17)$$

conhecida como Identidades de Bianchi. Essas identidades são uma equação tensorial e, portanto, válidas em qualquer sistema.

Antes de ver as consequências da eq. (2.17) devemos definir um outro tensor importante: o tensor de Ricci

$$R_{\alpha\beta} := R^\mu_{\sigma\mu\beta} = R_{\beta\alpha}. \quad (2.18)$$

Essa é apenas uma contração do tensor de Riemann no primeiro e terceiro índices. Da mesma forma, podemos definir o escalar de Ricci contraindo (2.18)

$$R := g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu}. \quad (2.19)$$

O último tensor que derivaremos será obtido aplicando a contração de Ricci às identidades de Bianchi. Efetuando os cálculos encontramos as identidades de Bianchi duplamente contraídas

$$(2R^\mu_\lambda - \delta^\mu_\lambda R)_{;\mu} = 0. \quad (2.20)$$

Podemos então definir o tensor simétrico $\mathbf{G}$ cujas componentes são

$$G^{\alpha\beta} \equiv R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R = G^{\beta\alpha}, \quad (2.21)$$

o que implica que (2.20) é equivalente à

$$G^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0. \quad (2.22)$$

É importante notar que o tensor construído em (2.21) foi obtido apenas a partir do tensor de Riemann e da métrica, possuindo ainda como identidade a ausência de divergente. Esse é o chamado tensor de Einstein.

Todas essas quantidades são importantes para a formulação das equações de campo de Einstein, que relacionam a curvatura do espaço-tempo com a existência de matéria e energia, caracterizada pelo tensor de energia-momentum $\mathbf{T}$ cujas componentes, no caso de um fluido perfeito, são dadas por

$$T^{\mu\nu} \equiv \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (2.23)$$

que é um tensor simétrico de ordem 2, com p sendo a pressão do fluido, ρ é sua densidade de energia e $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ é a quadri-velocidade em um referencial comóvel. Por isso, as equações dizem que um certo tensor de curvatura do espaço-tempo é proporcional ao tensor de energia-momentum da matéria e energia presentes nele. Dessa forma, concluímos que o tensor que buscamos deve ser também simétrico e de ordem 2. Esse é precisamente o tensor calculado em (2.21), a partir do qual podemos obter as chamadas Equações de Campo da Relatividade Geral:

$$G^\mu_\nu = kT^\mu_\nu, \quad (2.24)$$

onde a constante de proporcionalidade k está relacionada à constante de gravitação de Newton.

Podemos determinar o valor dessa constante k considerando um cálculo bem simples e útil que pode ser feito tomando o campo gravitacional do sistema solar - o exemplo mais próximo que possuímos de um campo gravitacional fraco. O primeiro passo é descrever relativisticamente a aceleração da gravidade. Podemos fazer isso a partir da eq. (2.2), na qual o parâmetro utilizado é o tempo próprio τ . Dela derivamos a equação de movimento na direção j :

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{00} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} = 0, \quad (2.25)$$

$$\frac{d^2x^j}{d\tau^2} = -\Gamma^j_{00}c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2. \quad (2.26)$$

Nosso interesse é calcular a aceleração $\vec{a} = a^j \vec{e}_j$ de uma partícula em um dado instante, isto é, $a^j = \frac{d^2 x^j}{dt^2}$, o que nos dá

$$a^j = -c^2 \Gamma_{00}^j, \quad (2.27)$$

a aceleração da gravidade definida como a aceleração de uma partícula em queda livre instantaneamente em repouso, onde Γ_{00}^j representa as componentes da aceleração gravitacional.

Supomos agora que nossa partícula se encontra na presença de um campo gravitacional fraco (como o do sistema solar), de modo que a curvatura do espaço-tempo é muito pequena. Isso significa que o tensor métrico desvia muito pouco da métrica de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$. Podemos representar esse desvio por um tensor $\mathbf{h}$ tal que

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad (2.28)$$

com $\|h_{\alpha\beta}\| \ll 1$ dado o campo gravitacional fraco.

Agora vamos calcular o símbolo de Christoffel Γ_{00}^j que aparece em (2.27). Para isso, recordamos a eq. (2.11) que nos dá uma forma de calcular os símbolos de Christoffel a partir da métrica de modo que, para esse caso, teremos

$$\Gamma_{00}^j = \frac{1}{2} g^{\alpha j} (g_{\alpha 0,0} + g_{\alpha 0,0} - g_{00,\alpha}), \quad (2.29)$$

que pode ser simplificada considerando que estamos descrevendo um campo gravitacional estático, o que faz da métrica independente do tempo

$$\Gamma_{00}^j = -\frac{1}{2} g^{\alpha j} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} \right). \quad (2.30)$$

Desenvolvendo esses cálculos e lembrando que $\eta_{00} = -1$, $\eta_{jj} = 1$ e $h_{jj} \ll 1$ encontramos

$$\Gamma_{00}^j = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^j}. \quad (2.31)$$

Inserindo (2.31) em (2.27) temos

$$a^j = \frac{c^2}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^j}. \quad (2.32)$$

Lembrando que $\vec{g} = -\nabla\Phi$, podemos obter uma expressão para h_{00} , a saber

$$h_{00} = -\frac{2\Phi}{c^2}, \quad (2.33)$$

onde Φ é o potencial gravitacional. Vemos que h_{00} é a única componente que contribui para a aceleração gravitacional, de modo que podemos escolher um sistema de coordenadas no qual as outras componentes de $\mathbf{h}$ desaparecem, obtendo então

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2. \quad (2.34)$$

Agora precisamos apenas determinar a função Φ . Para isso, analisamos uma equação de campo independente

$$R_{00} = k \left(T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T \right). \quad (2.35)$$

Como vimos em (2.13), podemos calcular as componentes do tensor de Riemann a partir da métrica de modo a obter

$$R_{\alpha 0 \mu 0} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^\alpha \partial x^\mu}. \quad (2.36)$$

Efetuada a contração de (2.36) obtemos

$$R_{00} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x^j} = \frac{1}{c^2} \nabla^2 \Phi. \quad (2.37)$$

Finalmente, considerando as componentes do tensor de energia-momentum de um fluido perfeito, temos que o limite newtoniano nos dá $T_{00} = \rho c^2$. Usando essa informação em (2.35) temos

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{2} k \rho c^4. \quad (2.38)$$

Da equação de Poisson $\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$ encontramos finalmente

$$k = \frac{8\pi G}{c^4}, \quad (2.39)$$

a constante gravitacional de Einstein. Assim, as equações de campo de Einstein vistas em (2.24) assumem a forma

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}. \quad (2.40)$$

Essa é uma equação extremamente poderosa para o estudo do Universo, na qual o lado esquerdo representa toda a informação geométrica por meio do tensor de curvatura de Ricci $R_{\mu\nu}$ e o lado direito representa o conteúdo de matéria e energia do espaço-tempo por meio do tensor de energia-momentum $T_{\mu\nu}$. A modelagem de um fluido perfeito se baseia no fato de que se um fluido isotrópico em um referencial levar a uma métrica isotrópica em um outro referencial, então os dois referenciais irão coincidir, de modo que o fluido estará em repouso em coordenadas comóveis. As coordenadas comóveis são particularmente importante para nós, pois estabelece um sistema de coordenadas que acompanha a expansão do Universo, de tal forma que um observador estacionário que participa dessa expansão terá a mesma coordenada em todos os instantes. Nas seções seguintes veremos como as equações de Einstein são utilizadas no contexto da Cosmologia e quais informações elas nos oferecem.

2.2 O Universo de Friedmann-Robertson-Walker

Durante muito tempo, os modelos cosmológicos desenvolvidos foram baseados no princípio copernicano, o qual afirma que o universo é o mesmo em todo lugar. De fato, podemos dizer que esse princípio é bastante adequado em certo nível, isto é, ele se relaciona com duas propriedades matemáticas bem definidas: homogeneidade e isotropia. Por homogêneo queremos dizer que a métrica considerada é a mesma em toda a variedade, enquanto que por isotrópico queremos dizer que o espaço parece o mesmo independente da direção que estamos olhando. A principal consequência dessas características está no fato de elas implicarem que o nosso espaço deve ser maximalmente simétrico, uma conclusão importante para a Relatividade Geral.

Todavia, se analisarmos a afirmação do princípio copernicano, veremos que ele só é adequado até certo grau. Isso porque as evidências observacionais indicam que o universo é homogêneo e isotrópico espacialmente - como afirma o princípio -, mas está evoluindo temporalmente. Esse é um fator que será de grande relevância para o estudo da história do Universo.

Tal história pode ser melhor compreendida por meio de suas equações. Por história entendemos o processo evolutivo da expansão do Universo, que teve sua mais forte evidência experimental com as observações do astrônomo estadunidense Edwin Hubble, que verificou o afastamento das galáxias a partir de seus desvios para o vermelho com relação à Terra. Entretanto, esse já era um resultado previsto teoricamente, embora tenha sido contestado pelo próprio Einstein na época. Em 1922, o físico e matemático russo Alexander Friedmann encontrou um conjunto de soluções para as equações de Einstein que descrevia um universo em expansão, pouco antes de Hubble publicar o resultado de suas observações.

Dessa forma, a fim de descrever o mundo da melhor forma possível, devemos encontrar o modelo que melhor explica os dados observacionais. Tal descrição nos força a abrir mão do princípio copernicano, o que nos leva a um universo espacialmente homogêneo e isotrópico mas que evolui no tempo. Tendo isso em mente, a Relatividade Geral nos permite traduzir essa relação na seguinte métrica:

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)d\sigma^2, \quad (2.41)$$

onde $R(t)$ é o fator de escala e $d\sigma^2 = \gamma_{ij}dx^i dx^j$, com γ_{ij} a métrica espacial tridimensional maximalmente simétrica. O fator de escala aqui está nos dizendo o quão grande nossa variedade Σ é em um determinado momento t .

Estamos interessados então em encontrar uma métrica euclidiana γ_{ij} maximalmente simétrica, o que nos implica um espaço esfericamente simétrico. Sabemos que métricas maximalmente simétricas obedecem a relação:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{R}{n(n-1)}(g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}), \quad (2.42)$$

onde n é a dimensão do espaço. Neste caso a equação se reduz para

$$R_{ijkl} = k(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}), \quad (2.43)$$

onde $k = \frac{R}{6}$. A partir do tensor riemanniano obtemos o tensor de Ricci:

$$R_{jl} = 2k\gamma_{jl}. \quad (2.44)$$

Assim, se nosso espaço é esfericamente simétrico, podemos expressar sua métrica da seguinte forma:

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij}dx^i dx^j = e^{2H(\bar{r})}d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2 \quad (2.45)$$

onde $\bar{r}$ é a componente radial e $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$. Sabemos que a métrica na solução esférica é dada por

$$ds^2 = -e^{2F(r)}dt^2 + e^{2H(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.46)$$

com F e H funções a serem determinadas (WEINBERG; DICKE, 1973). Dessa maneira, as componentes do tensor de Ricci podem ser obtidas fazendo $F = 0$ e $r = \bar{r}$ em (2.46), o que nos dá

$$R_{00} = 0 \quad (2.47)$$

$$R_{11} = \frac{2}{\bar{r}}H' \quad (2.48)$$

$$R_{22} = 1 + e^{-2H}(\bar{r}H' - 1) \quad (2.49)$$

$$R_{33} = [1 + e^{-2H}(\bar{r}H' - 1)] \sin^2 \theta. \quad (2.50)$$

Igualando tais componentes ao tensor de Ricci dado em (2.44) podemos resolver para $H(\bar{r})$, o que nos leva à métrica em Σ :

$$d\sigma^2 = \frac{d\bar{r}^2}{1 - k\bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\Omega^2, \quad (2.51)$$

de forma que o valor de k determina a curvatura do espaço. Podemos normalizar essa característica de modo que

$$k \in \{+1, 0, -1\}.$$

O caso $k = -1$ corresponde a uma curvatura negativa em Σ , o que pode ser chamado de aberto. O caso $k = +1$ corresponde a uma curvatura positiva em Σ , que pode ser chamado fechado. Por fim, o caso $k = 0$ corresponde a curvatura nenhuma em Σ , que pode ser chamado plano. Isso pode ser visto com maior facilidade introduzindo uma nova coordenada radial χ definida como

$$d\chi = \frac{d\bar{r}}{\sqrt{1 - k\bar{r}^2}}, \quad (2.52)$$

que pode ser integrada de modo a obter

$$\bar{r} = S_k(\chi), \quad (2.53)$$

onde

$$S_k(\chi) = \begin{cases} \sin(\chi), & \text{se } k = +1 \\ \chi, & \text{se } k = 0 \\ \sinh(\chi), & \text{se } k = -1. \end{cases} \quad (2.54)$$

Dessa maneira, a métrica em (2.51) assume a forma:

$$d\sigma^2 = d\chi^2 + S_k^2(\chi)d\Omega^2. \quad (2.55)$$

Assim, para o caso em que $k = +1$ temos a métrica $d\sigma^2 = d\chi^2 + \sin^2(\chi)d\Omega^2$, que é a métrica para uma esfera. Para o caso $k = 0$ temos a métrica $d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, que é o conhecido espaço euclidiano plano. Já para o caso $k = -1$ temos a métrica $d\sigma^2 = d\chi^2 + \sinh^2(\chi)d\Omega^2$, que é a métrica de um espaço de curvatura negativa constante (uma generalização do hiperbolóide).

Por fim, de (2.41) temos a chamada métrica de Robertson-Walker:

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left\{ \frac{d\bar{r}^2}{1 - k\bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\Omega^2 \right\}. \quad (2.56)$$

Agora, de modo a deixar (2.56) invariante escolhemos uma normalização adequada. Aqui trabalhamos com um fator de escala adimensional

$$a(t) = \frac{R(t)}{R_0},$$

uma coordenada com dimensões de distância

$$r = R_0 \bar{r}$$

e um parâmetro de curvatura com dimensões (comprimento)⁻²

$$\mathbf{k} = \frac{k}{R_0^2}.$$

Com essas novas variáveis a métrica de Robertson-Walker pode ser escrita como:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - \mathbf{k}r^2} + r^2 d\Omega^2 \right\}. \quad (2.57)$$

Com essa métrica em mãos podemos calcular o escalar de Ricci:

$$R = 6 \left\{ \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\mathbf{k}}{a^2} \right\}. \quad (2.58)$$

Agora que obtivemos a métrica de Robertson-Walker, temos as informações necessárias sobre nosso espaço e sobre o comportamento do fator de escala. O próximo passo é inserir essa métrica nas equações de Einstein a fim de relacionar o fator de escala com o tensor de energia-momentum do universo. Para fazer isso, vamos considerar matéria e energia como fluidos perfeitos de modo que estejam em repouso nas coordenadas comóveis. Dessa maneira, o tensor de energia-momentum assume a forma:

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (2.59)$$

onde $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$ é a quadri-velocidade.

Com isso em mente, consideramos as equações de Einstein escritas da seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right), \quad (2.60)$$

onde $T = T^\mu_\mu = -\rho + 3p$ é o traço de (2.59). Assim, calculando as componentes das eqs. de Einstein temos:

$$\mu\nu = 00 : \quad -3\frac{\ddot{a}}{a} = 4\pi G(\rho + 3p) \quad (2.61)$$

$$\mu\nu = ij : \quad \frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{\mathbf{k}}{a^2} = 4\pi G(\rho - p). \quad (2.62)$$

Podemos ainda utilizar a equação da componente 00 nas equações das componentes ij , obtendo assim a chamada equação de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\mathbf{k}}{a^2}, \quad (2.63)$$

e a equação de Raychaudhuri

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (2.64)$$

Assim, métricas como (2.57) obedecem tais equações e definem o universo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW).

Antes de avançarmos mais, lembramos que no estudo de cosmologia é importante conhecer algumas terminologias. Por isso, vale ressaltar que a taxa de expansão do universo é caracterizada pelo parâmetro de Hubble,

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.65)$$

que é um valor constante H_0 para a época atual. A partir desse conceito, podemos introduzir ainda o comprimento de Hubble e o tempo de Hubble como, respectivamente, $d_H = H_0^{-1}c$ e $t_H = H_0^{-1}$, onde c é a velocidade da luz. As medidas recentes indicam que o valor da constante de Hubble é $H_0 = 100h$ km/s/Mpc, onde $h \approx 0.7$ (CARROLL, 2019). A partir desse dado podemos então encontrar os valores de d_H e t_H .

Podemos também definir uma quantidade importante chamada “parâmetro de densidade”, que nada mais é do que a razão entre a densidade de matéria e energia no Universo e a densidade crítica. Assim,

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{crit}}, \quad (2.66)$$

onde $\rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G}$ é a densidade crítica. Essa última quantidade nos indica algo importante sobre o Universo: a densidade a partir da qual ele irá parar de se expandir. Isso pode ser visto reescrevendo a equação de Friedmann em termos do parâmetro de densidade, que nos dá

$$\Omega - 1 = \frac{\mathbf{k}}{H^2 a^2}. \quad (2.67)$$

Dessa forma o sinal de $\mathbf{k}$ depende do valor de Ω . Temos então:

$$\rho < \rho_{crit} \iff \Omega < 1 \iff \mathbf{k} < 0 \iff \text{aberto},$$

$$\rho = \rho_{crit} \iff \Omega = 1 \iff \mathbf{k} = 0 \iff \text{plano},$$

$$\rho > \rho_{crit} \iff \Omega > 1 \iff \mathbf{k} > 0 \iff \text{fechado}.$$

Encontramos então uma maneira de determinar a geometria do nosso Universo de FRW, isto é, basta encontrar o valor do parâmetro de densidade. Medidas recentes da radiação cósmica de fundo (RCF) indicam que esse parâmetro está bem próximo de 1, ou seja, o Universo está bem próximo de ser plano ([CARROLL, 2019](#)).

2.2.1 Evolução do fator de escala

Já abordamos anteriormente o fator de escala como uma medida do quão grande é nossa variedade. Dessa forma, podemos encarar esse fator em termos gerais como uma medida do tamanho do nosso universo em um instante de tempo t . Assim, para entendermos efetivamente o funcionamento do universo, devemos encontrar equações que nos descrevam sua dinâmica, de modo a facilitar o estudo de sua evolução. A forma mais intuitiva de fazer isso é inserir nossa métrica nas equações de Einstein a fim de relacionar o fator de escala com o tensor de energia-momentum, porém antes de fazermos isso é interessante tirarmos um tempo para entender melhor o funcionamento desse fator e quais informações ele nos fornece. É isso que faremos nessa seção.

Recordando o traço de (2.59) e considerando a componente zero da conservação de energia $\nabla_\mu T_0^\mu = 0$, encontramos

$$-\partial_0 \rho - 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p) = 0. \quad (2.68)$$

Podemos então considerar uma equação de estado do tipo $p = \omega\rho$, onde ω é um parâmetro que varia de acordo com o fluido considerado, de modo que

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1 + \omega)\frac{\dot{a}}{a} \quad (2.69)$$

pode ser resolvida para obter

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)}. \quad (2.70)$$

Aqui consideraremos valores de ω tais que $|\omega| \leq 1$ ¹. Assim, variando o valor de ω dentro dessa faixa encontramos diferentes modelos de fluidos cosmológicos, dentre os quais temos os dois principais: radiação e matéria.

O modelo de matéria estabelece um conjunto de partículas não-relativísticas e sem colisão que não exerce pressão, ou seja, são universos nos quais a densidade de energia é devida principalmente à existência de matéria. Para esse tipo de universo temos $\omega = 0$, o que nos mostra que a densidade de energia em matéria decresce como

$$\rho_M \propto a^{-3}. \quad (2.71)$$

O modelo de radiação leva em consideração radiação eletromagnética ou partículas que se movem próximas à velocidade da luz. Nesse modelo, a maior parte da densidade de energia está na forma de radiação e, tomando $\omega = \frac{1}{3}$, ela decresce como

$$\rho_R \propto a^{-4}. \quad (2.72)$$

Vale lembrar que a energia de vácuo também pode ser escrita na forma de fluido perfeito, com equação de estado $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ e com densidade de energia constante ($\omega = -1$)

$$\rho_\Lambda \propto a^0. \quad (2.73)$$

Agora temos todas as quantidades necessárias para entender como o fator de escala evolui com o tempo. Recordando a equação de Friedmann e a conservação de energia, podemos estudar o fator de escala para $k = 0$, isto é, um universo plano.

Nesse cenário, sabemos que o modelo dominado por matéria nos diz que $\rho_M \propto a^{-3}$. Da conservação de energia vemos que ρa^3 é constante, de modo que podemos escrever

$$\rho = \rho_0 \frac{a_0^3}{a^3}. \quad (2.74)$$

Inserindo (2.74) na equação de Friedmann temos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3 a^3}, \quad (2.75)$$

¹ Essa consideração é feita com base na condição de energia dominante nula (NDEC), que permite uma energia de vácuo de qualquer sinal, mas de outra forma requer matéria que não pode desestabilizar o vácuo, implicando em $|\omega| \leq 1$.

que pode ser resolvida de modo a obter uma relação para $a(t)$, isto é, para ver como o fator de escala evolui no tempo. Ao resolvermos (2.75) encontramos

$$a \propto t^{\frac{2}{3}}. \quad (2.76)$$

Esse modelo é conhecido como modelo de Einstein-de Sitter. Refazendo os cálculos para o modelo dominado por radiação ($\rho_R \propto a^{-4}$) e dominado por vácuo ($\rho_\Lambda \propto a^0$) encontramos, respectivamente,

$$a \propto t^{\frac{1}{2}} \quad (2.77)$$

e

$$a \propto e^{Ht}. \quad (2.78)$$

Dessa maneira, a partir da métrica de Friedmann-Robertson-Walker somos capazes de prever três universos distintos com base na sua curvatura. O principal fator que nos indica a real curvatura do universo é o seu parâmetro de densidade, que atualmente revela um universo plano. Todavia, estudos recentes indicam a existência de outras contribuições a esse parâmetro o que pode refletir em novos modelos de cosmologia. Ademais, se quisermos entender melhor a história do nosso universo podemos olhar para a evolução de seu fator de escala, que nos revela o comportamento do universo em diferentes épocas e nos indica a existência de um período de expansão muito veloz nos primeiros instantes após o Big Bang.

2.2.2 Inflação

O caso analisado na seção anterior para um modelo dominado por vácuo nos oferece algumas informações relevantes que merecem uma atenção especial na história do Universo. Uma análise lógica já nos dá o primeiro vislumbre de suas consequências, uma vez que a energia de vácuo está associada à energia do próprio universo, isto é, sem nenhum conteúdo de radiação ou matéria. Um universo vazio indica o princípio de sua história, o que nos permite analisar o segundo ponto nesse raciocínio: seu fator de escala. A eq. (2.78) mostra que o fator de escala para um modelo dominado por vácuo evolui exponencialmente e depende do parâmetro de Hubble e do tempo. Sabemos que o crescimento exponencial é extremamente veloz, o que nos indica que o Universo passou por um período de expansão muito rápido logo nos primeiros instantes de sua história, período que ficou popularmente conhecido como *Big Bang*. Esses primeiros instantes é o objeto de estudo da chamada teoria inflacionária, que possui grande sucesso ao conseguir explicar alguns dados que observamos atualmente e que abordaremos nessa seção.

De acordo com a teoria inflacionária, o Universo se expandiu exponencialmente nos seus primeiros estágios de evolução. No fim dessa expansão, a energia de vácuo se transformou em uma energia de matéria. A grande vantagem dessa teoria é que ela torna

possível obter soluções simples para diversos problemas cosmológicos e nos leva a algumas modificações de estruturas padrões do Universo.

Essa teoria foi proposta primeiramente por Alan Guth ([GUTH, 1981](#)), em 1981, e aprimorada por uma série de trabalhos, dentre os principais aqueles de Andrei Linde ([LINDE, 1982](#)). Como mencionado acima, essa teoria nos permite obter algumas soluções para certos problemas cosmológicos, dentre os quais podemos citar: o problema da homogeneidade e isotropia; o problema da planaridade e as flutuações iniciais.

Para começar nosso estudo usaremos as equações já mostradas aqui e, no cenário padrão, assumiremos ainda que a expansão é adiabática, de modo que

$$\frac{d}{dt}(sa^3) = 0, \quad (2.79)$$

onde s é a densidade de entropia. Podemos ainda negligenciar a interação de partículas em matéria super densa, o que significa que matéria super densa se parece quase como um gás ideal de partículas relativísticas. Assim, os valores de ρ , p e s são dados por

$$\rho = 3p = \frac{\pi^2}{30} \mathfrak{N}(T) T^4, \quad (2.80)$$

$$s = \frac{2\pi^2}{45} \mathfrak{N}(T) T^3. \quad (2.81)$$

Aqui $\mathfrak{N}(T)$ é o número efetivo de espécies de partículas:

$$\mathfrak{N}(T) = \mathbf{N}_B(T) + \frac{7}{8} \mathbf{N}_F(T), \quad (2.82)$$

onde $\mathbf{N}_B(\mathbf{N}_F)$ representa os graus de liberdade bosônicos (fermiônicos) com massas $m \ll T$ ([GUTH, 1981](#)). O termo $7/8$ deve-se à diferença nas estatísticas de bósons e férmions.

Com isso em mente, o primeiro passo para resolver os problemas cosmológicos citados acima é introduzir uma fase no início do Universo quando a forma dominante de energia-momentum é uma componente com pressão negativa que produz aceleração. Assumimos então que essa componente tem densidade de energia ρ_ϕ constante. Dessa forma, ignorando matéria e radiação, mas incluindo ρ_ϕ , a equação de Friedmann se torna:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3} \rho_\phi + \frac{k c^2}{a^2} = 0. \quad (2.83)$$

Como o termo que engloba a curvatura é pouco significativo, a solução da equação de Friedmann é uma expansão exponencial:

$$a = a_0 e^{t/t_H}, \quad (2.84)$$

$$\text{com } t_H = \frac{a}{\dot{a}} = \left(\frac{8\pi G \rho_\phi}{3}\right)^{-1/2}.$$

2.2.2.1 Solução do problema do horizonte

Um fóton é emitido em um caminho radial a partir de uma origem em $t = 0$, seguindo uma geodésica nula. Dessa maneira, o fóton percorre uma distância $a(t) dr$ à velocidade da luz. Suponhamos então que $a(t) = At^\alpha$ com $0 < \alpha < 1$. No tempo t o fóton terá percorrido uma distância

$$R_H(t) \equiv a(t)r = a(t) \int_0^t \frac{c dt'}{a(t')} = At^\alpha \int_0^t \frac{c dt'}{At'^\alpha} = \frac{ct}{1-\alpha}, \quad (2.85)$$

onde $R_H(t)$ é o raio do horizonte da partícula, a distância máxima que um sinal consegue se propagar na idade do Universo. Se $0 < \alpha < 1$ e α não é muito próximo de 1, $R_H \sim ct$. Ademais,

$$\text{Domínio de radiação} \implies \alpha = 1/2, R_H = 2ct,$$

$$\text{Domínio de matéria} \implies \alpha = 2/3, R_H = 3ct.$$

$R_H(t)$ cresce mais rápido que $a(t)$ e a razão do volume do horizonte comóvel hoje com uma época anterior é

$$\frac{R_H^3(t_0)/a^3(t_0)}{R_H^3(t)/a^3(t)} = \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3/\alpha-3} = (1+z)^{3/\alpha-3}. \quad (2.86)$$

Assim, para $\alpha = 2/3$ e $z = 1000$, essa razão é $\sim 3 \cdot 10^4$, de modo que a dispersão da RCF no universo atualmente observável continha $\sim 30\,000$ caminhos casualmente desconexos. Sendo assim, como a Radiação Cósmica de Fundo pode ser tão uniforme?

Para resolver esse problema, Guth propôs a ideia da inflação, dando tempo suficiente para que o Universo pudesse se tornar uniforme. Para um modelo com um crescimento muito rápido de $a(t)$ nós temos horizonte de eventos no lugar de horizonte de partículas. Dessa maneira, se dois observadores estão separados por um horizonte de eventos será impossível que eles sejam casualmente afetados um pelo outro no futuro, ou seja, nenhum deles pode enviar um sinal de luz que será recebido pelo outro.

Em um Universo que se expande exponencialmente, o raio do horizonte de eventos é $\sim cH^{-1}$. Se a inflação durar tempo o bastante teremos resolvido o problema do horizonte. Durante esse período os observadores perderão contato um com o outro conforme passam pelo horizonte de eventos, mas reganharão contato após o fim da inflação, quando entrarem no horizonte da partícula.

2.2.2.2 Solução do problema da planaridade

Segue da equação (2.63) que para $t \rightarrow 0$

$$\frac{|\rho - \rho_c|}{\rho_c} = \dot{a}^{-2}, \quad (2.87)$$

onde ρ_c é a densidade de energia correspondente a $k = 0$ e ρ é a densidade de energia em um universo fechado ou aberto ($k = \pm 1$) com o mesmo H .

A atual densidade de energia ρ não é conhecida com exatidão, $0.03 \leq \rho/\rho_c \leq 2$. Sendo assim, o valor de $|\rho - \rho_c|/\rho_c$ pode ser muito grande. Todavia, sabemos que $\dot{a}^{-2} \sim t$ nos primeiros estágios da evolução do Universo, o que sugere que o valor de $|\rho - \rho_c|/\rho_c$ era extremamente pequeno. É possível mostrar que pelo fato de o “raio” $a(t)$ do Universo atualmente exceder 10^{28} cm, o valor de $|\rho - \rho_c|/\rho_c$ deve ser menor que 10^{-59} próximo ao tempo de Planck.

Isso significa que se a densidade do Universo no tempo de Planck fosse ligeiramente maior que ρ_c , digamos $\rho \geq \rho_c(1 + 10^{-55})$, então o Universo seria fechado e teria colapsado milhões de anos atrás. Se $\rho \geq \rho_c(1 - 10^{-55})$, então o Universo seria aberto e a densidade de energia atual do Universo seria muito pequena.

Esse problema é solucionado para um número superior a 60 *e-folds*. *E-folding* é o intervalo de tempo no qual um crescimento exponencial aumenta por um fator e . Dessa maneira, para $N \gtrsim 60$ *e-folds* de crescimento exponencial fazem o Universo altamente plano no fim da inflação, já que o termo de curvatura $\frac{-kc^2}{a^2}$ diminui enquanto o termo $\frac{8\pi G\rho_\phi}{3}$ se mantém constante. Isso pode ocorrer em um tempo $\sim 60H^{-1} \sim 10^{-34}$ segundos se a inflação ocorrer a $T \approx 10^{15}$ GeV. Ao fim da inflação, a conservação de energia implica que uma grande quantidade de energia em ρ_ϕ deve ser convertida em radiação. Além disso, uma enorme quantidade de entropia é criada durante a época do “reaquecimento”.

2.2.2.3 Inflação e campos escalares

Um campo escalar ϕ com potencial $V(\phi)$ tem pressão e densidade de energia

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) - \frac{1}{6}(\vec{\nabla}\phi)^2, \quad (2.88)$$

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2. \quad (2.89)$$

Se os termos $\dot{\phi}^2$ e $(\vec{\nabla}\phi)^2$ forem muito menores que $V(\phi)$, então teremos $p \approx -\rho$, uma componente capaz de produzir uma expansão exponencial. Isso sugere que a inflação requer uma fase na qual $V(\phi)$ domina o suprimento de energia e pressão por um período de tempo suficientemente longo. A equação dinâmica para a evolução clássica de ϕ é

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \nabla^2\phi + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (2.90)$$

que lembra a equação para uma bola rolando uma colina potencial $V(\phi)$ com atrito $3H\dot{\phi}$ causado pela expansão do Universo (se desconsiderarmos, claro, o termo do gradiente).

Analisando a equação (2.90) podemos tirar algumas conclusões. Primeiramente, se $\dot{\phi}^2$ e $(\vec{\nabla}\phi)^2$ são pequenos comparados a $V(\phi)$, como pede a inflação, então podemos ignorar os termos $\ddot{\phi}$ e $\nabla^2\phi$, gerando uma equação para um “rolamento lento”:

$$3H\dot{\phi} = -\frac{dV}{d\phi}. \quad (2.91)$$

A inflação ocorre durante esse período, enquanto ϕ e a densidade de energia $V(\phi)$ são praticamente constantes. Assim, em unidades nas quais $\hbar = c = 1$ e $G = m_{Pl}^{-2}$, onde $m_{Pl} = (\hbar c/G)^{1/2}$ é a massa de Planck, a equação de Friedmann durante a inflação se torna

$$H^2 = \frac{8\pi}{3m_{Pl}^2} V(\phi). \quad (2.92)$$

O período inflacionário termina quando ϕ começa a oscilar próximo ao mínimo de $V(\phi)$, de modo que o termo da energia cinética domina a pressão e a densidade. Se existir algum tipo de acoplamento entre o campo ϕ e outros campos e partículas, então essas oscilações serão amortecidas e a energia será despejada nesses outros campos e partículas; essa é a época do reaquecimento.

A conservação de energia sugere que a densidade de energia em fótons e em partículas relativísticas no fim do reaquecimento deveriam ser próximas ao valor de $V(\phi)$ durante a inflação, mas o termo de atrito $3H\dot{\phi}$ permite que a energia seja dissipada efetivamente na expansão.

Após o reaquecimento, o Universo evolui normalmente como um Universo FRW dominado por radiação. Qualquer inhomogeneidade prévia foi apagada pela enorme expansão e o raio de curvatura foi inflado para uma enorme escala, contendo altíssima entropia.

2.2.2.4 Modelos inflacionários

Um bom modelo inflacionário deve seguir alguns requisitos. São eles:

1. *Começo*: a inflação começará se um grande volume de espaço (com tamanho $\gtrsim cH^{-1}$) tiver $V(\phi)$ dominante sobre $\dot{\phi}^2$ e $(\vec{\nabla}\phi)^2$.
2. *Duração*: a fase de “rolamento lento” deve durar pelo menos ~ 60 *e-folds* para solucionar o problema do horizonte.
3. *Fim*: um modelo inflacionário satisfatório também requer uma “saída elegante” na qual o universo (ou pelo menos parte dele) para de inflar e reaquece.

Como foi dito anteriormente, o primeiro modelo foi proposto por Guth em 1981. Em seu artigo, Guth apresenta a forma de $V(\phi)$ motivada por modelos GUT (*Grand Unification Theories*), e a inflação durou um longo período porque ϕ estava preso em um

estado metaestável por uma barreira de potencial. A inflação terminava com ϕ tunelando a barreira e rolando para $V(\phi) = 0$. Infelizmente, esse mecanismo leva à nucleação de bolhas, e essas bolhas precisam colidir para que o Universo reaqueça. Contudo, os centros das nucleações estão se afastando devido à inflação, de modo que as bolhas nunca colidem.

Esse erro mostra que o modelo de Guth falha na “saída elegante”, falha essa admitida pelo próprio Guth e corrigida por trabalhos posteriores de outros pesquisadores. Nesses novos modelos, $V(\phi)$ tem um plateau no lugar de uma barreira. Assim, ϕ começa próximo de zero e lentamente rola plateau abaixo até atingir um potencial mínimo, onde oscila e reaquece.

O modelo de Guth é tipicamente chamado de “velha inflação”, enquanto o modelo baseado no plateau é conhecido como “nova inflação”. Existe ainda um terceiro modelo, chamado “inflação caótica”, no qual o mínimo de $V(\phi)$ ocorre em $\phi = 0$, com $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ ou $V(\phi) = \lambda\phi^4$. Atualmente, os modelos mais populares são baseados em variações da inflação caótica. Nesse cenário, a equação do oscilador harmônico assume a forma:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -m^2\phi, \quad (2.93)$$

com $3H\dot{\phi}$ interpretado como o termo de fricção. Assim, a equação de Einstein para um universo homogêneo contendo um campo escalar ϕ se torna

$$H^2 + \frac{\mathbf{k}}{a^2} = \frac{1}{6}(\dot{\phi}^2 + m^2\phi^2). \quad (2.94)$$

Se o campo escalar ϕ era inicialmente grande, o parâmetro de Hubble também era grande. Isso significa que o termo de fricção era muito grande, de modo que o campo escalar estava se movendo muito lentamente, como uma bola em um líquido viscoso. Assim, nesse estágio a densidade de energia do campo escalar se manteve quase constante, e a expansão do universo continuou com uma velocidade muito maior que na velha teoria cosmológica. Em função desse crescimento na escala do universo e do movimento lento do campo ϕ , logo após o começo desse regime tínhamos $\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}$, $H^2 \gg \frac{\mathbf{k}}{a^2}$, $\dot{\phi}^2 \ll m^2\phi^2$, de maneira que o sistema de equações pode ser simplificado:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{m\phi}{\sqrt{6}}, \quad \dot{\phi} = -m\sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (2.95)$$

A primeira equação mostra que se o campo ϕ variar lentamente, o tamanho do universo nesse regime cresce aproximadamente como e^{Ht} , com $H = \frac{m\phi}{\sqrt{6}}$. Cálculos mostram que, depois de um longo período de inflação, o universo inicialmente preenchido por um campo $\phi \gg 1$ cresce exponencialmente

$$a = a_0 e^{\phi^2/4}. \quad (2.96)$$

Sendo assim, a teoria inflacionária pode ser simples como as teorias de osciladores harmônicos. Vemos então que a inflação não é apenas um truque utilizado para solucionar problemas das velhas teorias do *Big Bang*, mas um regime cosmológico genérico.

2.2.3 Modelos Cosmológicos Alternativos

Assim como o modelo inflacionário foi proposto com o intuito de solucionar alguns dos principais problemas cosmológicos da época, diversos modelos cosmológicos alternativos surgiram para tentar solucionar outros problemas existentes. Os principais modelos alternativos envolvem o estudo da interação entre matéria e energia escura, visando solucionar, entre outros, o problema da coincidência. Esse problema questiona o fato de matéria e energia escuras terem atualmente valores similares dado que a variação de tempo entre elas é muito diferente. É importante salientar ainda que esses modelos foram postos à prova usando os dados observacionais mais recentes visando explicar os dados astronômicos coletados.

Os principais dados utilizados são de Supernovas do tipo Ia (SNIa), que indicam uma expansão acelerada do Universo. Durante muito tempo, essa expansão foi prevista pelos cientistas, porém não se sabia de seu caráter acelerado. Os dados obtidos a partir dos estudos desse tipo de supernova foram fundamentais para tal medida, de modo que diversos modelos surgiram para tentar explicar as causas dessa aceleração. Na relatividade, a expansão acelerada é causada por uma nova componente da densidade de energia com pressão negativa, chamada energia escura (WANG et al., 2016).

A partir desse estudo, modelos cosmológicos incluindo matéria e energia escura foram propostos, porém a grande maioria não é capaz de explicar o atual valor da constante cosmológica (conhecido como *problema da constante cosmológica*) nem a grande semelhança dos valores de matéria e energia escura na época atual do Universo (o já citado *problema da coincidência*). Visando resolver esses problemas, surgiram os modelos interativos entre matéria e energia escura.

Nesses modelos, consideramos todas as componentes de pressão e densidade de energia. Dessa maneira, teremos as equações (2.63) e (2.64) escritas como

$$H^2 + \frac{\mathbf{k}}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \sum \rho_i + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.97)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \sum (\rho_i + 3p_i) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.98)$$

onde ρ_i e p_i são a densidade de energia e pressão das diferentes componentes de matéria (incluindo aqui bárions, matéria escura fria, radiação, etc), relacionadas pela equação de estado $\omega_i = p_i/\rho_i$.

Ademais, como energia e matéria escura dominam o conteúdo de energia do Universo atualmente, é bastante razoável assumir que essas componentes escuras podem interagir entre elas e com outras componentes, de onde podemos derivar algumas propriedades importantes para seu estudo.

Finalmente, antes de iniciar um estudo mais detalhado nesses modelos devemos fazer algumas considerações. Primeiramente, não somos capazes de determinar a natureza da energia escura baseados em dados observacionais, o que nos dá uma grande liberdade para construir diferentes modelos. Além disso, a constante cosmológica pode ser interpretada como um fluido com equação de estado característica ou como um campo escalar com energia cinética nula, sendo a energia escura comumente considerada como parte de uma teoria de campos muito bem sucedida quando aplicada ao Universo em seus primeiros estágios. Por fim, a energia escura pode ser tratada como fluido, campo escalar, campo vetorial, etc, e suposições como o princípio holográfico podem ser usadas para construir modelos diversos. Nas seções posteriores, faremos um resumo dos principais modelos de energia e matéria escura interativos.

2.3 Interação entre matéria escura e energia escura

Como dito anteriormente, o Modelo Padrão foi capaz de resolver grandes problemas cosmológicos da época, porém deixou muitos outros questionamentos em aberto. Para contornar essa situação, novos modelos cosmológicos foram propostos, dentre eles modelos que consideram a existência de matéria escura e energia escura.

Essa consideração está baseada no fato de o universo ter entrado em um período de expansão acelerada, constatação essa baseada na observação de SNIa. Pela perspectiva da relatividade geral, uma expansão acelerada é motivada por uma nova componente da densidade de energia com pressão negativa, chamada de energia escura. As evidências observacionais são consistentes com uma constante cosmológica Λ regendo a época atual de expansão acelerada e uma componente de matéria escura dando origem a galáxias e suas distribuições. Assume-se que essa componente de matéria escura possui pressão e temperatura negligenciáveis, sendo chamada de Fria (em inglês *Cold Dark Matter*, que dá nome ao modelo Λ CDM, indicando a natureza dos principais componentes).

Ainda que esse modelo esteja de acordo com as observações ele possui um grande problema do ponto de vista teórico: o valor da constante cosmológica é várias ordens de grandeza menor do que o previsto pela física de partículas. Para solucionar esse problema foi proposto que a energia escura poderia ser dinâmica, evoluindo no tempo. Todavia, esse modelo também apresenta um grave problema, já que não consegue diminuir a severidade do problema da coincidência. Assim, introduziu-se modelos cosmológicos nos quais matéria escura e energia escura interagem entre si. Tais modelos foram capazes de explicar o valor da constante cosmológica bem como aliviar o problema da coincidência, sendo portanto nosso próximo objeto de estudo.

2.3.1 Modelo de Concordância

O atual modelo cosmológico é descrito pela métrica de Friedmann-Robertson-Walker

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \mathbf{k}r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (2.99)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala em um instante t e $\mathbf{k}$ é a curvatura do espaço. É possível ainda reparametrizar essa expressão usando o tempo conforme, definido como $dt = a(\tau)d\tau$. Nessas coordenadas, a equação (2.99) pode ser escrita como

$$ds^2 = a^2(\tau) \left[-d\tau^2 + \frac{dr^2}{1 - \mathbf{k}r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right]. \quad (2.100)$$

Descrevendo o conteúdo de matéria do universo como um fluido perfeito com densidade de energia média ρ e pressão p , encontramos as equações (2.97) e (2.98). Notamos então que a constante cosmológica oferece uma explicação para o atual período de expansão acelerada. Quando Λ é positivo e domina o lado direito de (2.98) temos $\ddot{a} > 0$ e a expansão é acelerada. Podemos ainda utilizar o parâmetro de desaceleração $q = -\ddot{a}/(aH^2) < 0$ para explicar essa expansão, sendo H o parâmetro de Hubble. Além da constante cosmológica e do termo de curvatura, o modelo de concordância inclui ainda outras componentes da densidade de energia tais como bárions (b), matéria escura fria (c) e radiação (r), caracterizados respectivamente pelos parâmetros $\omega_b = \omega_c = 0$ e $\omega_r = 1/3$ na equação de estado. Se a fonte da expansão acelerada é a energia escura (d), então o parâmetro da sua equação de estado poderia ser constante ou variar com o tempo, mas deve satisfazer $\omega_d < -1/3$. O modelo Λ CDM refere-se ao caso $\omega_d = -1$.

2.3.1.1 Modelos interativos de matéria escura e energia escura

Dessa maneira, vemos que é importante encontrarmos modelos melhores que expliquem os dados coletados e estejam de acordo com as teorias atuais. Para isso, introduzimos o conceito de matéria escura e energia escura, mas esses conceitos separados não resolvem todas as questões, como mostrado no modelo de concordância. Assim, desenvolvemos modelos nos quais matéria escura e energia escura interagem entre si com energia conservada para cada componente na forma

$$\frac{d\rho_i}{dt} + 3H(1 + \omega_i)\rho_i = 0, \quad (2.101)$$

onde $i = (b, c, d, r)$. Como a natureza do setor escuro é desconhecida, podemos apenas deduzir algumas propriedades com base na observação. Primeiramente, a energia escura deve contribuir com uma pressão negativa ao conteúdo de energia, enquanto a matéria escura possui uma pressão muito pequena, próxima de zero. O acoplamento da energia escura com os bárions é provavelmente negligenciável. O acoplamento com radiação é muito difícil, já que os fótons não seguiriam uma geodésica e a deflexão da luz de estrelas durante

eclipses solares estaria em contradição com as observações. Finalmente, o acoplamento entre matéria escura e energia escura também deve ser pequeno, já que o modelo de concordância, no qual a energia escura é uma constante cosmológica não-interativa, adequa muito bem os dados (WANG et al., 2016).

Dessa maneira, um modelo de interação entre matéria escura e energia escura parece ser a melhor solução, já que pode resolver o problema da coincidência permitindo soluções com uma razão matéria escura/energia escura em períodos distantes, ou aliviá-lo supondo que essa razão varie mais lentamente que o proposto pelo modelo de concordância.

2.3.1.2 Modelo de fluido

No modelo de concordância, a densidade de energia de cada componente $i = (c, b, r, d)$ é conservada separadamente como mostra a equação (2.101). Em um modelo interativo, a densidade de energia total do setor escuro é conservada, mas as densidades de matéria escura e energia escura evoluem como

$$\dot{\rho}_c + 3H\rho_c = Q, \quad (2.102)$$

$$\dot{\rho}_d + 3H(1 + \omega_d)\rho_d = -Q, \quad (2.103)$$

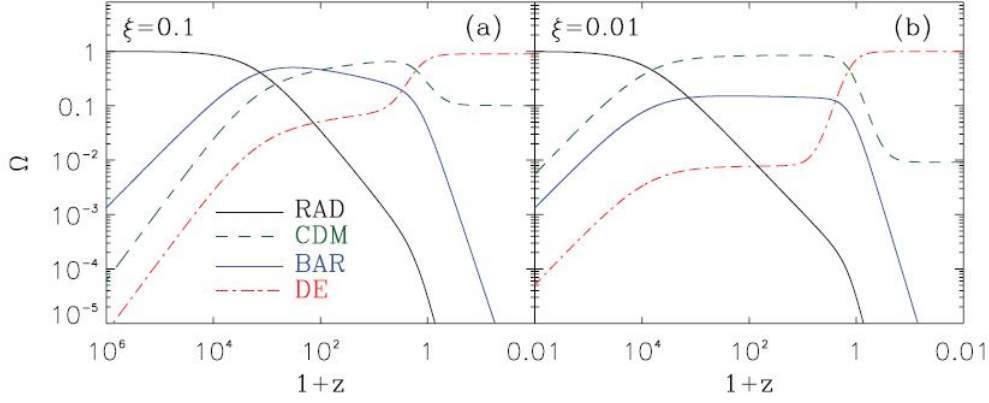
onde Q representa o kernel de interação (WANG et al., 2016). Essa interação introduz uma correção na evolução do universo, de modo que se $|Q| \gg 0$ o universo teria continuado no período dominado por matéria (caso $Q > 0$) ou não teria passado por um período dominado por matéria, alterando a formação das galáxias e das estruturas de larga escala (caso $Q < 0$). Assim como em física de partículas, é de se esperar que o kernel seja uma função das densidades de energia envolvidas e do tempo.

Expandindo por série de Taylor de primeira ordem temos os termos de interação escritos como $Q = H(\xi_2\rho_d + \xi_1\rho_c)$, onde os coeficientes ξ_1 e ξ_2 são constantes a serem determinadas observacionalmente. Para facilitar, normalmente usa-se apenas um parâmetro, podendo-se escolher $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$ ou $\xi_1 = \xi_2$, o que nos dá

$$Q = H\xi_1\rho_c, \quad Q = H\xi_2\rho_d \quad \text{e} \quad Q = H\xi(\rho_d + \rho_c). \quad (2.104)$$

Podemos ver agora como essa interação é capaz de aliviar o problema da coincidência. Devido à interação, a razão das densidades de energia $r = \rho_c/\rho_d$ evolui com o fator de escala $r \propto a^{-\zeta}$ (WANG et al., 2016), onde ζ é um parâmetro constante que varia no intervalo de $[0, 3]$. Quando $\zeta = 3$ a solução corresponde ao modelo Λ CDM com $\omega_d = -1$ e $Q = 0$. Quando $\zeta = 0$, r é constante e o problema da coincidência é resolvido. A Figura 1 mostra a evolução da densidade de energia considerando um modelo interativo com kernel $Q = H\xi(\rho_d + \rho_c)$ para os casos em que $\xi = 0.1$ e $\xi = 0.01$.

Figura 1 – Evolução da densidade de energia em um modelo interativo com kernel $Q = H\xi(\rho_d + \rho_c)$. Na legenda, RAD corresponde à radiação, CDM à matéria escura, BAR aos bárions e DE à energia escura com parâmetro $\omega_d = -1.1$. Em (a) $\xi = 0.1$ e em (b) $\xi = 0.01$.



Fonte: (WANG et al., 2016).

Como podemos observar, é de nosso interesse aliviar o máximo possível o problema da coincidência. Dessa forma, é importante encontrar formas de determinar a severidade desse problema para saber o quão bom nosso modelo realmente é, de modo que sejamos capazes de descartar de ante mão os modelos cujo problema da coincidência não é resolvido. É com esse objetivo que introduzimos um outro método para determinar essa severidade, chamado *statefinder parameters*, cujos parâmetros adimensionais

$$\chi = \frac{1}{aH^3} \frac{d^3 a}{dt^3}, \quad s = \frac{\chi - 1}{3(q - \frac{1}{2})} \quad (2.105)$$

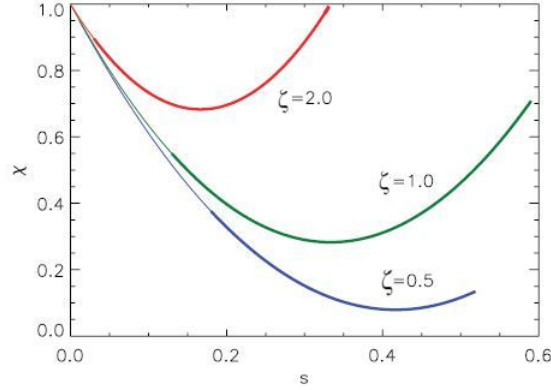
foram introduzidos primeiramente por (SAHNI et al., 2003). Esse parâmetro é um diagnóstico geométrico que nos permite caracterizar propriedades da energia escura em um modelo independente. O *statefinder*, além de ser adimensional, é construído a partir do fator de escala e suas derivadas temporais apenas. Assim, se ω_d for constante e a razão entre as densidades de energia variar com $r \propto a^{-\zeta}$, então

$$\chi = 1 + \frac{9}{2} \frac{\omega_d}{1 + r_0(1+z)^\zeta} \left[1 + \omega_d - \left(\omega_d + \frac{\zeta}{3} \right) \frac{r_0(1+z)^\zeta}{1 + r_0(1+z)^\zeta} \right], \quad (2.106)$$

$$s = 1 + \omega_d - \left(\omega_d + \frac{\zeta}{3} \right) \frac{r_0(1+z)^\zeta}{1 + r_0(1+z)^\zeta}. \quad (2.107)$$

Sabemos que valores baixos de ζ correspondem a modelos com um problema da coincidência menos severo, de modo que podemos representar a função $\chi(s)$ para três valores de ζ , mostrando que baixos valores de ζ correspondem a baixas curvas em $s - \chi$, como mostra a Figura 2. Dessa forma, para um dado modelo, o *statefinder* é útil para determinar a severidade do problema da coincidência.

Figura 2 – Curvas $\chi(s)$ para um parâmetro $\omega_d = -1.1$ e $r_0 = 3/7$ com três valores de ζ . As linhas finas correspondem à evolução futura no intervalo $z = [-0.9, 0]$ e as linhas grossas à evolução passada em $z = [0, 20]$.



Fonte: (WANG et al., 2016).

No modelo de concordância, em particular, temos os parâmetros constantes $\chi = 1$ e $s = 0$. Qualquer desvio desses valores seria uma evidência observacional contra o modelo de concordância. Vemos então que a falta de dados referentes à energia escura nos dá uma certa liberdade para criar diferentes modelos. Todavia, agora somos capazes também de avaliar cada modelo para atestar sua validade em diversos âmbitos. Assim, podemos formular modelos que sejam capazes de diminuir a severidade do problema da coincidência, acabar com a discrepância entre os valores observacionais e teóricos da constante cosmológica e ainda resolver outros problemas pendentes do Modelo Padrão.

2.4 Formalismo ADM

2.4.0.1 Folheação do espaço-tempo e geometria de hipersuperfícies

O formalismo ADM é uma formulação Hamiltoniana da Relatividade Geral desenvolvida em (ARNOWITT; DESER; MISNER, 2008) por Richard Arnowitt, Stanley Deser e Charles W. Misner. Apesar do formalismo hamiltoniano ser completo, isto é, independente do formalismo lagrangiano, é normal construí-lo partindo de uma langrangiana. Seguiremos esse caminho visando definir uma hamiltoniana específica para o vácuo e, assim, escrever as equações de movimento para a relatividade geral.

A formulação Hamiltoniana em mecânica clássica é dada em termos das variáveis canônicas q_i , as coordenadas generalizadas, e p_i , os momenta, em um dado instante t . No entanto, em teoria de campos estamos trabalhando com campos e não com sistemas mecânicos. Sendo assim, as variáveis canônicas $\phi(x)$ e os momenta canônicos $\pi_\phi(x)$ são funções da posição, ambos dados em um instante t . A Relatividade Geral trata ainda o espaço e o tempo em mesmo pé de igualdade, de modo que para discutir a relatividade

geral em um formalismo Hamiltoniano devemos romper essa igualdade, uma vez que apenas as derivadas temporais são transformadas em momenta e não as derivadas espaciais.

Assumimos então a folheação do espaço-tempo em termos de superfícies tridimensionais tipo-espaço S da variedade M do espaço-tempo. Consideramos o caso de uma variedade lorentziana M difeomórfica $\mathbb{R} \times S$, onde a variedade S representa o espaço e $t \in \mathbb{R}$ representa o tempo. Vale lembrar que a fatiagem do espaço-tempo em “instantes de tempo” é uma escolha arbitrária, isto é, há diversas maneiras de se escolher um difeomorfismo

$$\phi : M \longrightarrow \mathbb{R} \times S.$$

Vamos considerar agora a superfície $\Sigma \approx \Sigma_{t_0} : t_0 = \text{const}$ em uma variedade de espaço-tempo folheada $\mathbb{R} \times \Sigma$, que pode ser considerada como uma superfície restrita caracterizada por $C_{t_0} = t - t_0 = 0$. A geometria da superfície restrita Σ_{t_0} no espaço-tempo é regida pela geometria riemanniana com métrica g_{ab} . Assim, podemos associar à restrição C_{t_0} um campo vetorial tipo-Hamiltoniano $g^\# dC_{t_0}$ na geometria riemanniana (BOJOWALD, 2010):

$$g^\# dC_{t_0} = g^{ab} \partial_b C_{t_0} = g^{ab} \partial_b t = g^\# dt. \quad (2.108)$$

Isso nos mostra que, na geometria riemanniana, o campo vetorial $X^a = g^{ab} \partial_b t$ é normal à superfície restrita Σ_{t_0} . Usando a definição de vetor normal X^a podemos determinar o vetor normal normalizado (tipo-tempo) à superfície

$$n^a = \frac{X^a}{\sqrt{-g_{bc} X^b X^c}}, \quad (2.109)$$

de modo que $g_{ab} n^a n^b = -1$. Além disso, para qualquer campo vetorial s^a tangente à Σ_{t_0} temos $g_{ab} s^a s^b = 0$. Cada fatia espacial Σ_{t_0} tem sua própria estrutura riemanniana e a métrica induzida h_{ab} em Σ_{t_0} pode ser determinada unicamente usando as condições

$$h_{ab} n^a = 0, \quad h_{ab} s^a = g_{ab} s^a, \quad (2.110)$$

para qualquer vetor s^a tangente à Σ_{t_0} . Assim, a métrica induzida é dada por

$$h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b. \quad (2.111)$$

Para estudar a dinâmica de uma formulação canônica, interpretamos a métrica induzida h_{ab} como um campo tensorial tridimensional dependente do tempo na família de variedades Σ_{t_0} . Assim, podemos definir derivadas temporais da métrica induzida ou de qualquer outro campo. Introduzimos então um campo vetorial de evolução temporal $t = t^a \nabla_a$ para definir a direção das derivadas temporais. Introduzindo um campo vetorial de deslocamento (*shift vector*) $N^a := h^{ab} t_b$ e uma função intervalo temporal (*lapse function*) $N := -n_b t^b$, o campo vetorial de evolução temporal t^a pode ser decomposto em uma parte espacial e uma parte normal

$$t^a = N n^a + N^a. \quad (2.112)$$

Com essa relação, podemos escrever a métrica inversa do espaço-tempo como

$$g^{ab} = h^{ab} - n^a n^b = h^{ab} - \frac{1}{N^2} (t^a - N^a) (t^b - N^b). \quad (2.113)$$

Invertendo essa matriz e escrevendo as coordenadas da base encontramos o elemento de linha

$$g_{ab} dx^a dx^b = -N^2 dt^2 + h_{ab} (dx^a + N^a dt) (dx^b + N^b dt) \quad (2.114)$$

nas coordenadas x^a tais que $t^a \nabla_a = \partial/\partial t$ (BOJOWALD, 2010). Isso nos diz que a geometria do espaço-tempo é descrita não por uma única métrica, mas pela geometria espacial das fatias codificadas em h_{ab} , juntamente com deformações nas fatias vizinhas com respeito umas às outras como descrito por N e N^a .

2.4.0.2 Geometria extrínseca e intrínseca

Dada a derivada covariante tridimensional D_a , podemos definir os tensores de curvatura intrínseca como

$${}^3R_{abc}{}^d \omega_d = D_a D_b \omega_c - D_b D_a \omega_c \quad (2.115)$$

para todos os 1-formas espaciais ω_c , i.e., $\omega_a n^a = 0$. Dessa curvatura riemaniana intrínseca, podemos obter o tensor de Ricci intrínseco ${}^3R_{ab}$ e o escalar 3R por meio de contrações.

Além disso, dado um vetor n^a normal à superfície Σ , o tensor de curvatura extrínseca é um tensor espacial em Σ pela definição de D_a :

$$K_{ab} := D_a n_b = h_a^c h_b^d \nabla_c n_d. \quad (2.116)$$

Dessa maneira, K_{ab} mede o quanto a superfície Σ está curvada em M , já que nos diz quanto o vetor tangente à Σ deixará de ser tangente se nós o transportarmos paralelamente usando a conexão de Levi-Civita em M .

2.4.0.3 As equações de Gauss-Codazzi

Algumas componentes do tensor de Riemann dependem apenas da curvatura intrínseca e extrínseca, ou seja, da curvatura de h_{ab} . As fórmulas que descrevem a relação entre as componentes de curvatura são conhecidas como equações de Gauss-Codazzi (BOJOWALD, 2010) e nos serão úteis mais adiante.

Vamos calcular R_{efg}^h em termos de K_{ab} e ${}^3R_{abc}^d$. Para isso, computamos

$$\begin{aligned} D_a D_b \omega_c &= D_a (h_b^d h_c^e \nabla_d \omega_e) = h_a^f h_b^g h_c^h \nabla_f (h_g^d h_h^e \nabla_d \omega_e) \\ &= h_a^f h_b^d h_c^e \nabla_f \nabla_d \omega_e + h_c^e (K_{ab} n^d) \nabla_d \omega_e - K_{ac} K_b^e \omega_e. \end{aligned} \quad (2.117)$$

Usando as equações (2.115) e (2.117) obtemos

$$\begin{aligned} {}^3R_{abc}^e \omega_e &= D_a D_b \omega_c - D_b D_a \omega_c \\ &= h_a^f h_b^d h_c^e (\nabla_f \nabla_d \omega_e - \nabla_d \nabla_f \omega_e) - K_{ac} K_b^e \omega_e + K_{bc} K_a^e \omega_e. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Isso nos dá a chamada equação de Gauss

$$h_a^e h_b^f h_c^g R_{efg}^d = {}^3R_{abc}^d + K_{ac} K_b^d - K_{bc} K_a^d \quad (2.119)$$

Para derivar a equação de Codazzi, devemos efetuar o seguinte cálculo

$$\begin{aligned} h_e^a h_f^b h_g^c R_{abcd} n^d &= h_e^a h_f^b h_g^c (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) n_c \\ &= D_e K_{fg} - D_f K_{eg} - h_e^a h_f^b h_g^c (n^d \nabla_d n_c) (\nabla_a n_b - \nabla_b n_a). \end{aligned} \quad (2.120)$$

Usando a simetria da projeção $\nabla_a n_b$, o último termo dessa equação some, resultando na equação de Codazzi

$$h_e^a h_f^b h_g^c R_{abcd} n^d = D_e K_{fg} - D_f K_{eg}. \quad (2.121)$$

Usando essas duas equações e algumas propriedades do tensor de Riemann é possível escrever o escalar de Ricci em termos da curvatura extrínseca

$$R = {}^3R + K_{ab} K^{ab} - K^2 - 2\nabla_a v^a, \quad (2.122)$$

onde v^a é um campo vetorial definido como $v^a := -n^a \nabla_c n^c + n^c \nabla_c n^a$.

2.4.0.4 Densidade Lagrangiana

A densidade Lagrangiana para o vácuo é

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} R. \quad (2.123)$$

Todavia, buscamos $\mathcal{L}$ em termos das variáveis que descrevem a hipersuperfície Σ_{t_0} . Para isso, devemos realizar alguns procedimentos. O primeiro deles é utilizar a seguinte relação:

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{h}. \quad (2.124)$$

Ademais, da definição do tensor de Einstein G_{ab} temos que R é dado por

$$\begin{aligned} G_{ab} &= R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \\ -R g_{ab} n^a n^b &= 2(G_{ab} n^a n^b - R_{ab} n^a n^b) \\ -R n_b n^b &= 2(G_{ab} n^a n^b - R_{ab} n^a n^b) \\ R &= 2(G_{ab} n^a n^b - R_{ab} n^a n^b) \end{aligned} \quad (2.125)$$

Das equações de Gauss-Codazzi, que relacionam a curvatura espacial 3R à curvatura espaço-temporal R , temos a seguinte relação

$$G_{ab}n^an^b = \frac{1}{2}[{}^3R - K_{ab}K^{ab} + K^2] \quad (2.126)$$

Da definição do tensor de Ricci R_{ab} temos

$$\begin{aligned} R_{ab} &= R_{acb}{}^c \\ R_{ab}n^an^b &= R_{acb}{}^cn^bn^a \\ &= -(\nabla_a\nabla_c - \nabla_c\nabla_a)n^cn^a \\ &= (\nabla_an^a)(\nabla_cn^c) - \nabla_a(n^a\nabla_cn^c) - (\nabla_cn^a)(\nabla_an^c) + \nabla_c(n^a\nabla_an^c) \\ &= K^2 - K_{ac}K^{ac} - \nabla_a(n^a\nabla_cn^c) + \nabla_c(n^a\nabla_an^c) \end{aligned}$$

Os dois últimos termos da última equação são derivadas totais e podem ser desprezados, de modo que ficamos com a seguinte equação

$$R_{ab}n^an^b = K^2 - K_{ac}K^{ac}. \quad (2.127)$$

A partir das equações (2.123) e (2.127) podemos escrever a densidade Lagrangiana em termos das variáveis da hipersuperfície

$$\mathcal{L} = N\sqrt{h}({}^3R + K_{ab}K^{ab} - K^2). \quad (2.128)$$

2.4.0.5 Densidade Hamiltoniana

Em mecânica clássica, a densidade Hamiltoniana é obtida por meio da equação

$$\mathcal{H} = \sum_i p_i\dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i). \quad (2.129)$$

Para a Relatividade Geral, escolhemos a métrica induzida h_{ab} como nossas coordenadas generalizadas e os momenta canônicos p_i são substituídos pelos momenta conjugados a h_{ab} , i.e., p^{ab} . Assim, temos que

$$\mathcal{H} = p^{ab}\dot{h}_{ab} - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i). \quad (2.130)$$

Agora, buscamos a variação de $\mathcal{H}$ com relação a N e N^a . Para isso, devemos ter $\mathcal{H}$ em termos de N , N^a e h_{ab} . Pela definição de momentum canônico, temos

$$\begin{aligned} p^{ab} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{ab}} \\ &= N\sqrt{h} \left[\frac{\partial {}^3R}{\partial \dot{h}_{ab}} + \frac{\partial (K_{ab}K^{ab})}{\partial \dot{h}_{ab}} - \frac{\partial K^2}{\partial \dot{h}_{ab}} \right] \\ &= \sqrt{h}(k^{ab} - h^{ab}K) \end{aligned} \quad (2.131)$$

Agora, precisamos escrever K_{ab} em termos de N , N^a e h_{ab} . Para isso, usamos a equação (2.116) da seguinte forma

$$\begin{aligned} K_{ab} &= h_b^d h_a^c \nabla_c n_d = (g_b^d + n_b n^d) h_a^c \nabla_c n_d \\ &= h_a^c \nabla_c n_b + n_b n^d h_a^c \nabla_c n_d. \end{aligned} \quad (2.132)$$

Usando a simetria de K_{ab} junto com a equação (2.132) podemos escrever

$$\begin{aligned} 2K_{ab} &= (g_a^c + n_a n^c) \nabla_c n_b + (g_b^c + n_b n^c) \nabla_c n_a \\ &= n^c \nabla_c (n_a n_b) + \nabla_a n_b + \nabla_b n_a \\ &= n^c \nabla_c h_{ab} + h_{cb} \nabla_a n^c + h_{ac} \nabla_b n^c =: \mathcal{L}_n h_{ab}. \end{aligned} \quad (2.133)$$

Dessa maneira, temos que a curvatura extrínseca é metade da derivada de Lie da métrica induzida ao longo da normal:

$$K_{ab} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{ab}. \quad (2.134)$$

Da última identidade na equação (2.133) temos que

$$\begin{aligned} K_{ab} &= \frac{1}{2} [n^c \nabla_c h_{ab} + h_{cb} \nabla_a n^c + h_{ac} \nabla_b n^c] \\ &= \frac{1}{2N} [N n^c \nabla_c h_{ab} + h_{cb} \nabla_a (N n^c) + h_{ac} \nabla_b (N n^c)] \\ &= \frac{1}{2N} h_a^c h_b^d (\mathcal{L}_t h_{cd} - \mathcal{L}_N h_{cd}), \end{aligned} \quad (2.135)$$

onde fizemos a substituição $N n^a = t^a - N^a$. Ademais, $\mathcal{L}_N h_{ab} = D_a N_b + D_b N_a$ e $\dot{h}_{ab} = h_a^c h_b^d \mathcal{L}_t h_{cd}$. Assim, podemos reescrever a equação (2.135) como

$$K_{ab} = \frac{1}{2N} (\dot{h}_{ab} - D_a N_b - D_b N_a). \quad (2.136)$$

Finalmente podemos usar a equação (2.130) para escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= p^{ab} \dot{h}_{ab} - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i) \\ &= -N \sqrt{h} {}^3R + \frac{N}{\sqrt{h}} \left[p^{ab} p_{ab} - \frac{1}{2} p^2 \right] + 2p^{ab} D_a N_b \\ &= \sqrt{h} \left[N \left[-{}^3R + h^{-1} p^{ab} p_{ab} - \frac{1}{2} h^{-1} p^2 \right] - 2N_b [D_a (h^{-1/2} p^{ab})] + 2D_a (h^{-1/2} N_b p^{ab}) \right] \\ &= \sqrt{h} \left[N \left[-{}^3R + h^{-1} p^{ab} p_{ab} - \frac{1}{2} h^{-1} p^2 \right] - 2N_b [D_a (h^{-1/2} p^{ab})] \right], \end{aligned} \quad (2.137)$$

onde p é o traço de p^{ab} e nós desconsideramos o termo de borda na última linha, já que estamos considerando uma superfície suficientemente grande de modo que os efeitos de borda são negligenciáveis.

2.4.0.6 Restrições e equações de movimento

Vemos da equação (2.128) que a ação depende de $\dot{h}_{ab}$ via K_{ab} , mas não depende de derivadas temporais das componentes N e N^a . Assim, temos nossas restrições primárias

$$p_N(x) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{N}} = 0 \quad e \quad p_a(x) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{N}^a} = 0. \quad (2.138)$$

Essas são as restrições primárias porque a relação

$$p^{ab}(x) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{h}_{ab}} = \frac{1}{2N} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta K_{ab}} = \sqrt{h} (K^{ab} - K h^{ab}) \quad (2.139)$$

pode ser invertida por

$$\dot{h}_{ab} = \frac{N}{\sqrt{h}} (2p_{ab} - h_{ab}p) + 2D_{(a}N_{b)}.^2 \quad (2.140)$$

As restrições primárias (2.138) implicam restrições secundárias

$$0 = \dot{p}_N = \{p_N, H\} = -h^{-1/2} \left(p_{ab}p^{ab} - \frac{p^2}{2} \right) + \sqrt{h}^3 R =: -C_{grav} \quad (2.141)$$

$$0 = \dot{p}_{N^a} = \{p_{N^a}, H\} = 2D_b p_a^b =: -C_a^{grav} \quad (2.142)$$

onde C_{grav} é a chamada restrição hamiltoniana e C_a^{grav} a restrição difeomórfica.

Finalmente, as equações de movimento podem ser obtidas calculando

$$\dot{h}_{ab} = \frac{\delta H}{\delta p^{ab}} = \{h_{ab}, H\} \quad (2.143)$$

$$\dot{p}^{ab} = -\frac{\delta H}{\delta h_{ab}} = \{p^{ab}, H\} \quad (2.144)$$

A equação (2.143) apenas reproduz o resultado obtido em (2.140). A equação (2.144) nos dá

$$\begin{aligned} \dot{p}^{ab} = & - N\sqrt{h} \left({}^3R^{ab} - \frac{{}^3R h^{ab}}{2} \right) + \frac{N h^{ab}}{2\sqrt{h}} \left(p_{cd}p^{cd} - \frac{p^2}{2} \right) \\ & - \frac{2N}{\sqrt{h}} \left(p^{ac}p_c^b - \frac{p^{ab}p}{2} \right) + \sqrt{h} \left(D^a D^b N - h^{ab} D^c D_c N \right) \\ & + \sqrt{h} D_c \left(\frac{N^c p^{ab}}{\sqrt{h}} \right) - 2p^{c(a} D_c N^{b)}. \end{aligned} \quad (2.145)$$

As equações de restrição (2.141) e (2.142) junto com as equações de movimento (2.143) e (2.144) constituem a formulação Hamiltoniana da relatividade geral com restrições para o vácuo. Dadas condições iniciais que satisfaçam as restrições, o universo pode ser determinado em qualquer instante. Para isso, basta evoluir o sistema por meio das equações de movimento.

² Aqui, a notação $D_{(a}N_{b)}$ é utilizada em razão da simetrização, ou seja, $A_{\mu(\nu}B_{\alpha)\beta} = 1/2(A_{\mu\nu}B_{\alpha\beta} + A_{\mu\alpha}B_{\nu\beta})$.

3 Resultados

3.1 Modelos alternativos analisados

A seguir analisaremos dois modelos cosmológicos aplicando a metodologia estudada nas seções anteriores para obter as equações de movimento, isto é, o formalismo ADM. O primeiro modelo foi apresentado por [KOUTSOUMBAS et al.](#), cujo artigo deriva as equações dos campos e a solução numérica correspondente. Para o segundo modelo, consideramos a ação apresentada por [BABICHEV; CHARMOUSIS](#), onde são exploradas as soluções do tipo buraco negro.

3.1.1 Modelo da literatura

Para iniciar esse modelo, buscamos uma ação com simetria de translação, de modo que na densidade de energia, na pressão e na equação de evolução apareçam apenas derivadas $X(t)$ e $\dot{X}(t)$ do campo escalar e não o campo escalar em si. Isso porque fluidos com essa característica são capazes de induzir uma descrição unificada do setor escuro, nosso principal objetivo. Dessa maneira, nossa ação se torna

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2} + \frac{1}{2} (X - X^{1/2}) - \frac{\lambda_3}{2} X^{-1/2} \square \phi + \frac{\lambda_5}{2} G_{\mu\nu} \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi \right], \quad (3.1)$$

onde λ_3 e λ_5 são constantes de acoplamento e ϕ um campo escalar com simetria translacional, motivo pelo qual é chamado de galileon. Vale ressaltar ainda que essa é uma parte da ação de Horndeski¹. Podemos então variar (3.1) com relação a $N(t)$ e $a(t)$ de modo a obter as equações de Friedmann e Raychaudhuri. Fazendo $N = 1$ sem perda de generalidade, temos

$$3H^2 = \left(\frac{1}{2} + 9\lambda_5 H^2 \right) X - \frac{3\lambda_3 H}{\sqrt{2}}, \quad (3.2)$$

$$-(3H^2 + 2\dot{H}) = -\frac{\sqrt{X}}{2} + \sqrt{X} \left(\frac{1}{2} - 3\lambda_5 H^2 - 2\lambda_5 \dot{H} \right) - 2\lambda_5 H \dot{X} + \frac{\lambda_3 \dot{X}}{2\sqrt{2}X}. \quad (3.3)$$

Buscamos aqui usar os graus de liberdade dessa teoria para descrever os setores de energia escura e matéria escura de forma unificada. Para isso, expressamos o modelo como um fluido unificado que se comporta como matéria escura em épocas iniciais e intermediárias, e como energia escura em épocas distantes. Dessa maneira, escrevendo

¹ A classe de teorias de Horndeski envolve a combinação mais geral de um campo escalar e sua derivada, levando a equações diferenciais de campo de segunda ordem.

a lagrangiana de unificação como uma soma de lagrangianas presentes em nossa ação podemos reduzir as equações (3.2) e (3.3) para

$$\rho_U \equiv \left(\frac{1}{2} + 9\lambda_5 H^2\right) X - \frac{3\lambda_3 H}{\sqrt{2}}, \quad (3.4)$$

$$p_U \equiv -\frac{\sqrt{X}}{2} + \sqrt{X} \left(\frac{1}{2} - 3\lambda_5 H^2 - 2\lambda_5 \dot{H}\right) - 2\lambda_5 H \dot{X} + \frac{\lambda_3 \dot{X}}{2\sqrt{2}X}. \quad (3.5)$$

onde o subíndice U denota a característica unificada do fluido. Essas quantidades são úteis para definir o parâmetro da equação de estado do universo ω_U que é o fluido que engloba matéria e energia escura de maneira unificada

$$\omega_U \equiv \frac{p_U}{\rho_U} = \frac{-\frac{\sqrt{X}}{2} + \sqrt{X} \left(\frac{1}{2} - 3\lambda_5 H^2 - 2\lambda_5 \dot{H}\right) - 2\lambda_5 H \dot{X} + \frac{\lambda_3 \dot{X}}{2\sqrt{2}X}}{\left(\frac{1}{2} + 9\lambda_5 H^2\right) X - \frac{3\lambda_3 H}{\sqrt{2}}}. \quad (3.6)$$

Ademais, variando a ação (3.1) com relação a $\phi(t)$ obtemos

$$\begin{aligned} & -3\sqrt{2}HX^{3/2} + 12\sqrt{2}HX^2 \left(\frac{1}{2} + 3\lambda_5 + 2\lambda_5 \dot{H}\right) \\ & + 3\lambda_3 H \dot{X} + 2X \left[-3\lambda_3 \dot{H} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\dot{X} + H^2(-9\lambda_3 + 3\sqrt{2}\lambda_5 \dot{X})\right] = 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

que é a equação de evolução para o galileon e pode ser reescrita, usando as equações (3.4) e (3.5), como uma equação de conservação:

$$\dot{\rho}_U + 3H(\rho_U + p_U) = 0. \quad (3.8)$$

De modo a obter uma descrição unificada da matéria e energia escura devemos primeiramente resolver a equação (3.2) em X , obtendo

$$X = \frac{3H(\sqrt{2}\lambda_3 + 2H)}{2(\frac{1}{2} + 9\lambda_5 H^2)}. \quad (3.9)$$

Substituindo essa equação em (3.7), encontramos uma equação diferencial para $H(t)$

$$\dot{H} = \frac{\sqrt{6}H^{3/2}(\frac{1}{2} + 9\lambda_5 H^2) \left\{ \frac{1}{2}(\sqrt{2}\lambda_3 + 2H)^{3/2}(\frac{1}{2} + 9\lambda_5 H^2)^{1/2} - \sqrt{6}H \left[\lambda_3^2(\frac{1}{2} - 3\lambda_5 H^2) + 3\sqrt{2}\lambda_3 H(\frac{1}{2} + \lambda_5 H^2) + 4H^2(\frac{1}{2} + 3\lambda_5 H^2) \right] \right\}}{\lambda_3^2(\frac{1}{2} - 27\lambda_5 H^2)(\frac{1}{2} + 3\lambda_5 H^2) + 6\sqrt{2}\lambda_3 H(\frac{1}{4} + 5\frac{1}{2}\lambda_5 H^2 + 36\lambda_5^2 H^4) + 8H^2[\frac{1}{4} + 9\lambda_5 H^2(\frac{1}{2} + 6\lambda_5 H^2)]}. \quad (3.10)$$

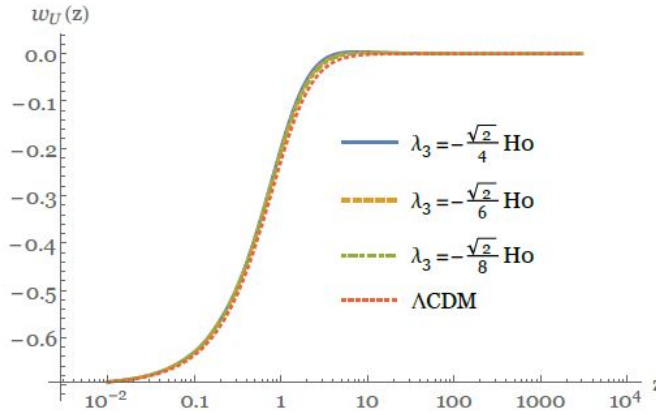
O passo seguinte é colocar as equações (3.9) e (3.10) em (3.6) de modo a encontrar uma expressão para ω_U que dependa apenas de H e dos parâmetros λ_3 e λ_5 . Fazendo isso

ficamos com

$$\begin{aligned}
\omega_U = & \left\{ 3H \left\{ \lambda_3^2 \left(\frac{1}{2} - 27\lambda_5 H^2 \right) \left(\frac{1}{2} + 3\lambda_5 H^2 \right) + 6\sqrt{2}\lambda_3 H \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{2}\lambda_5 H^2 + 36\lambda_5^2 H^4 \right) \right. \right. \\
& + \left. \left. 8H^2 \left[\frac{1}{4} + 9\lambda_5 H^2 \left(\frac{1}{2} + 6\lambda_5 H^2 \right) \right] \right\} \right\}^{-1} \left\{ -\sqrt{3}(\sqrt{2}\lambda_3 + 2H)^{3/2} \left(\frac{1}{2} + 9\lambda_5 H^2 \right)^{3/2} \right. \\
& + \left. 3H \left\{ 4H^2 \left(\frac{1}{2} + 15\lambda_5 H^2 \right) + 3\lambda_3^2 \left(\frac{1}{4} + 8\lambda_5 H^2 - 9\lambda_5^2 H^4 \right) \right. \right. \\
& + \left. \left. 6\sqrt{2}\lambda_3 H \left[\frac{1}{4} + 3\lambda_5 H^2 \left(\frac{5}{2} - 6\lambda_5 H^2 \right) \right] \right\} \right\}. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Assim, uma vez resolvida a equação diferencial (3.10), teremos a solução para a equação de estado ω_U por meio de (3.11). Infelizmente, a equação (3.10) não pode ser resolvida analiticamente. Assim, para resolver essa equação diferencial devemos optar pelo método computacional, utilizando o Maple para encontrar uma solução gráfica.

Figura 3 – Evolução de $\omega_U(z)$ em escala logarítmica com $z \sim 3000$.



Fonte: (KOUTSOUMBAS et al., 2018).

Uma análise mais qualitativa desse gráfico pode gerar ótimas conclusões. Por exemplo, se fizermos X quase constante em épocas iniciais podemos expandir ω_U a partir da equação (3.6) para grandes valores de H , o que nos dá um valor aproximado $\omega_U \rightarrow 0$. Por outro lado, se X deixar de ser constante, decrescendo por exemplo, então ω_U começa a variar de 0 para -1 . O modelo que estudamos aqui apresenta esses comportamentos; de fato, para grandes valores de H obtemos $X \rightarrow \frac{1}{3\lambda_5} = \text{const}$, como esperado. Podemos notar ainda que adicionando um termo de acoplamento à ação, gerando um termo extra $\ddot{\phi}$, poderia mudar a energia cinética do fluido cosmológico e mudando o caráter $\omega_U \rightarrow 0$ em épocas iniciais para $\omega_U \rightarrow \text{const}$. Nesse caso, adicionar alguns termos à ação poderia levar ao cenário no qual ω_U começa em -1 em épocas iniciais e varia em direção a $1/3$, permanecendo nesse valor por tempo suficiente. Então varia para zero por um longo

intervalo e finalmente retorna para -1 em épocas distantes. Essa evolução é capaz de descrever toda a história térmica do Universo, isto é, o período inflacionário, de radiação, de matéria e as eras de matéria e energia escura.

Isso nos mostra que pequenas variações na ação considerada são suficientes para mudar o comportamento de ω_U , de modo a explicar a evolução do universo em diferentes eras. Com isso em mente, assumiremos uma outra ação na seção seguinte buscando estudar outros comportamentos de ω_U , considerando outros termos acoplados à ação.

3.1.2 Modelo com Galileons

Para iniciar esse modelo, consideramos uma ação contendo um campo escalar com simetria de translação, fato pelo qual esse campo é conhecido como galileon. Soluções do tipo buraco negro têm sido bastante estudadas nesses modelos, porém aqui iremos explorar sua cosmologia. O modelo é bastante conveniente graças a essa simetria, já que tanto nas equações de campo como nas definições de densidade de energia e pressão aparecem somente termos cinéticos do campo. Assim, somos capazes de introduzir uma descrição unificada do setor escuro. Lembramos ainda que essa também é uma parte da ação de Horndeski, escrita como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\zeta R - \eta (\partial\phi)^2 + \beta G^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - 2\Lambda \right], \quad (3.12)$$

onde Λ é a constante cosmológica, ϕ é o galileon, $\zeta > 0$, η e β são constantes de acoplamento (BABICHEV; CHARMOUSIS, 2014), com η sendo o termo cinético do galileon e β a interação não-mínima entre o galileon e a geometria. Variando (3.12) com relação a $N(t)$ e $a(t)$, e tomando $N = 1$ sem perda de generalidade, obtemos as equações de movimento da geometria

$$-3H^2\zeta + \frac{1}{2}\eta\dot{\phi}^2 + \frac{9}{2}\beta H^2\dot{\phi}^2 + \Lambda = 0, \quad (3.13)$$

$$-\zeta(2\dot{H} + 3H^2) + \frac{1}{2}\eta\ddot{\phi}^2 + \frac{3}{2}\beta H^2\dot{\phi}^2 + \Lambda + 2\beta H\dot{\phi}\ddot{\phi} + \beta\dot{H}\dot{\phi}^2 = 0. \quad (3.14)$$

Variando a ação (3.12) com relação a $\phi(t)$ obtemos ainda a equação de evolução para o campo escalar

$$-2\eta H\dot{\phi} - 2\eta\ddot{\phi} + 6\beta H^3\dot{\phi} + 12\beta H(\dot{H} + H^2)\dot{\phi} + 6H^2\beta\ddot{\phi} = 0. \quad (3.15)$$

Definindo a densidade de energia unificada e a pressão unificada do fluido, como feito na seção anterior, temos que

$$\rho_U \equiv \frac{1}{2}\eta\dot{\phi}^2 + \frac{9}{2}\beta H^2\dot{\phi}^2 + \Lambda, \quad (3.16)$$

$$p_U \equiv -\frac{1}{2}\eta\dot{\phi}^2 - \frac{3}{2}\beta H^2\dot{\phi}^2 - \Lambda - 2\beta H\dot{\phi}\ddot{\phi} - \beta\dot{H}\dot{\phi}^2. \quad (3.17)$$

Dessa maneira, a equação de estado unificada se torna

$$\omega_U \equiv \frac{p_U}{\rho_U} = \frac{-\frac{1}{2}\eta\dot{\phi}^2 - \frac{3}{2}\beta H^2\dot{\phi}^2 - \Lambda - 2\beta H\dot{\phi}\ddot{\phi} - \beta\dot{H}\dot{\phi}^2}{\frac{1}{2}\eta\dot{\phi}^2 + \frac{9}{2}\beta H^2\dot{\phi}^2 + \Lambda}. \quad (3.18)$$

De modo a obter a descrição unificada do setor escuro como desejamos, devemos primeiramente resolver a equação (3.13). Para isso, isolamos o termo de energia cinética $X = \frac{\dot{\phi}^2}{2}$, de modo a obter

$$X = \frac{3H^2\zeta - \Lambda}{\eta + 9\beta H^2}. \quad (3.19)$$

Substituindo esse resultado em (3.15) encontramos a equação diferencial para $H(t)$

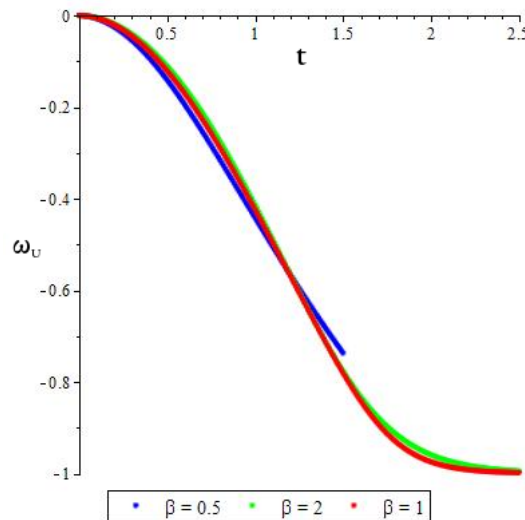
$$\dot{H} = \frac{-243H^6\beta^2\zeta + 81H^4\beta^2\Lambda + 3H^2\eta^2\zeta - \eta^2\Lambda}{162H^4\beta^2\zeta - 27H^2\beta^2\Lambda + 27H^2\beta\eta\zeta - 15\beta\eta\Lambda - 3\eta^2\zeta} \quad (3.20)$$

A seguir colocamos as equações (3.19) e (3.20) em (3.18) de modo a encontrar uma expressão para ω_U que dependa apenas de H e dos parâmetros β e ζ . Fazendo isso, ficamos com

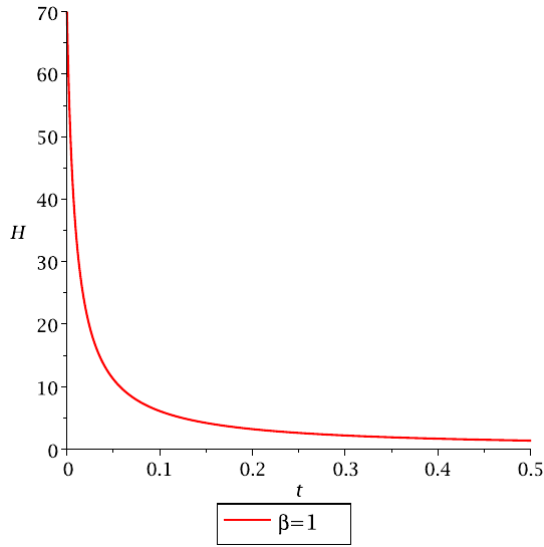
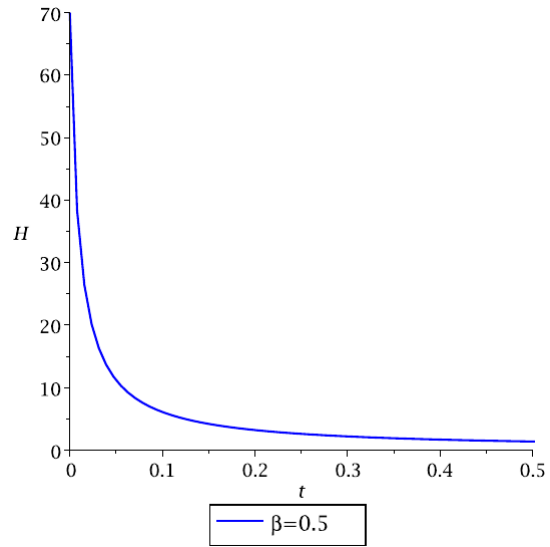
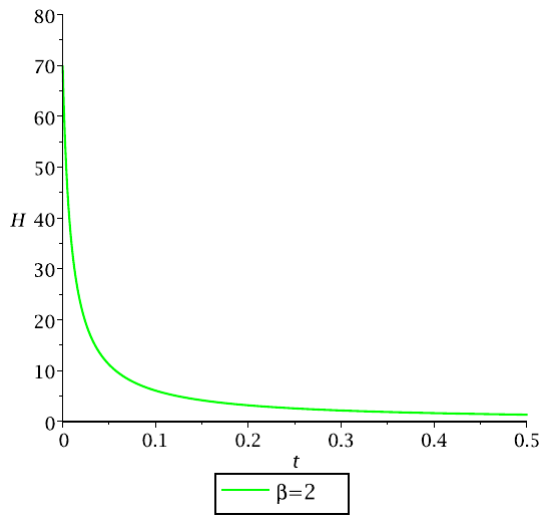
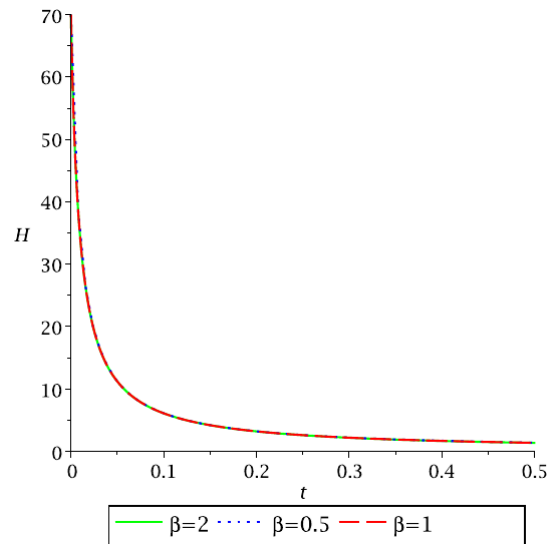
$$\omega_U = -\frac{729H^6\beta^3\Lambda\zeta + 405H^6\beta^2\eta\zeta^2 + 162H^4\beta^2\eta\Lambda\zeta + 108H^4\beta\eta^2\eta^2 - 126H^2\beta^2\eta\Lambda^2 - 87H^2\beta\eta^2\Lambda\zeta - 9H^2\eta^3\zeta^2 + 2\beta\eta^2\Lambda^2}{9H^2\zeta(54H^4\beta^2\zeta - 9H^2\beta^2\Lambda + 9H^2\beta\eta\zeta - 5\beta\eta\Lambda - \eta^2\zeta)(\eta + 9\beta H^2)}. \quad (3.21)$$

Como a equação (3.20) não pode ser resolvida analiticamente recorreremos ao Maple para encontrar uma solução. Para isso, assumimos $\eta = 1/2$, $\zeta = \Lambda = 1$ e utilizamos três valores para β , isto é, $\beta = 0.5$, 1 e 2, graficando os valores de ω_U em função do tempo na Figura 4, enquanto a Figura 5 mostra ainda o comportamento de $H(t)$ para os diferentes valores de β .

Figura 4 – Comparação entre os valores de ω_U para diferentes valores de β .



Fonte: Autor.

Figura 5 – Gráficos de $H(t)$.(a) Gráfico de $H(t)$ com parâmetro $\beta = 1$.(b) Gráfico de $H(t)$ com parâmetro $\beta = 0.5$.(c) Gráfico de $H(t)$ com parâmetro $\beta = 2$.(d) Comparação entre o comportamento de $H(t)$ para os diferentes parâmetros.

Fonte: Autor.

Podemos ver na Figura 4 que o valor de ω_U começa em zero e decresce rapidamente até atingir valor próximo a -0.7 , quando começa a decrescer mais lentamente, atingindo estabilidade próximo a -1 . Esse comportamento, comparado ao primeiro modelo que vimos, caracteriza um parâmetro de estado que evolui desde uma época dominada pela matéria até uma época dominada pela constante cosmológica que, por sua vez, produz a aceleração do Universo. Novamente isso nos mostra que as pequenas variações que fazemos na ação podem gerar conclusões diferentes, mas que ainda podem ser explicadas com base nos dados observacionais.

Além disso, vemos na Figura 5 que a variação no parâmetro β influencia muito pouco desde que essa variação esteja dentro de um intervalo específico. Os cálculos realizados mostram que já para $\beta = 0.1$, por exemplo, o modelo começa a apresentar divergências. Ademais, como mencionado em seções anteriores, assumimos o valor de H para a época atual como sendo $H_0 = \frac{h}{3000} \text{ Mpc}^{-1}$, com constante adimensional h em torno de 0.69.

Os dois modelos que apresentamos nessa seção constituem modelos cosmológicos alternativos que propõem a interação entre matéria e energia escuras. Como é possível observar, eles se baseiam em uma ação escolhida apropriadamente para o cenário estudado, de modo que nossa análise se baseia no espaço em si, isto é, está pautada na modificação do lado esquerdo das equações de Einstein apresentadas em (2.40). Na seção seguinte iremos apresentar um outro modelo cosmológico que estuda o conteúdo de matéria e energia do Universo, isto é, analisa o lado direito das eqs. (2.40).

3.2 O gás de Chaplygin

Como já citado anteriormente, o estudo da Cosmologia avança conforme novos dados observacionais constatarem a validade dos modelos propostos. Assim, o modelo de Einstein-de Sitter foi amplamente utilizado até que os dados disponíveis mostraram o caráter acelerado da expansão do Universo. Essa descoberta levou à procura por novos tipos de matéria que pudessem se comportar como uma constante cosmológica, combinando densidade de energia positiva e pressão negativa (KAMENSHCHIK; MOSCHELLA; PASQUIER, 2001). Esse tipo de matéria é comumente chamada de quintessência, embora não seja a única possibilidade considerada.

Assim como em diversos modelos inflacionários, é comum querermos representar o caráter exponencial da atual expansão com um campo escalar que seja responsável por tal expansão. Todavia, nossa tarefa é justamente a oposta já que estamos interessados em encontrar uma forma de descrever a transição de um universo cheio de matéria tipo poeira para um universo que se expande exponencialmente. Considerar um campo escalar nesse cenário não é nossa única possibilidade e, de fato, iremos explorar uma outra alternativa.

É dessa forma que introduzimos um fluido perfeito que obedece uma equação de estado “exótica”, chamado gás de Chaplygin. Quando citarmos esse gás estaremos nos referindo simplesmente a um fluido perfeito que obedece a seguinte equação de estado:

$$p = -\frac{A}{\rho}, \quad (3.22)$$

onde p e ρ representam, respectivamente, a pressão e a densidade de energia em um referencial comóvel, com $\rho > 0$ e A sendo uma constante positiva. É interessante ressaltar que essa equação foi proposta por Chaplygin em (CHAPLYGIN, 1944) como um modelo

conveniente no estudo de asas de avião, isto é, no contexto da aerodinâmica. Todavia, a eq. (3.22) foi “redescoberta” posteriormente em função de suas características únicas.

De fato, ela tem forte conexão com a teoria das cordas, podendo ser obtida a partir da ação de Nambu-Goto para d-branas movendo-se em um espaço-tempo $(d+2)$ -dimensional na parametrização de cone tipo luz (KAMENSHCHIK; MOSCHELLA; PASQUIER, 2001). Além disso, esse é o único fluido que, até agora, admite uma generalização super-simétrica (BENTO; BERTOLAMI; SEN, 2002). A pressão negativa que segue dessa equação de estado também pode ser usada para descrever o efeito de sólidos deformáveis. Por fim, outra característica interessante é que ela fornece um valor positivo e limitado para o quadrado da velocidade do som $v_s^2 = A/\rho^2$, o que não é trivial para fluidos com pressão negativa (KAMENSHCHIK; MOSCHELLA; PASQUIER, 2001).

3.2.1 O gás de Chaplygin na cosmologia FRW

Uma forma interessante de verificar a amplitude desse fluido é estudar uma cosmologia FRW de um universo composto pelo gás de Chaplygin. Nesse cenário, a métrica de um universo homogêneo e isotrópico pode ser escrita de forma simplificada como

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dl^2, \quad (3.23)$$

onde dl^2 é a métrica de uma variedade tridimensional com curvatura constante ($k = 0, \pm 1$) e o fator de escala $a(t)$ evolui de acordo com a equação de Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \rho - \frac{k}{a^2}. \quad (3.24)$$

Combinando essa equação com a conservação de energia e a equação de estado apresentada em (3.22) chegamos à seguinte relação:

$$\rho = \sqrt{A + \frac{B}{a^6}}, \quad (3.25)$$

sendo B uma constante de integração. Se tomarmos um valor positivo para B podemos ver que, para pequenos valores de a , o valor da densidade de energia se aproxima de

$$\rho \sim \frac{\sqrt{B}}{a^3}, \quad (3.26)$$

o que corresponde a um universo dominado por matéria tipo poeira. Para grandes valores de a a aproximação se torna

$$\rho \sim \sqrt{A} \quad \text{e} \quad p \sim -\sqrt{A}, \quad (3.27)$$

o que corresponde a um universo vazio com constante cosmológica $\sqrt{A}$, ou seja, um universo de de-Sitter. Para sabermos o que poderia acontecer em uma fase intermediária,

voltamos à eq. (3.25) na qual consideramos inicialmente um valor pequeno de a , como $a^6 \ll B/A$. Agora, se considerarmos valores com $a^6 \gg B/A$ e levamos em conta os termos não dominantes, obteremos

$$\rho \approx \sqrt{A} + a^{-6} \sqrt{\frac{B}{4A}}, \quad (3.28)$$

$$p \approx -\sqrt{A} + a^{-6} \sqrt{\frac{B}{4A}}. \quad (3.29)$$

As eq. (3.28) e (3.29) descrevem a mistura de uma constante cosmológica $\sqrt{A}$ com um tipo de matéria conhecida como “matéria rígida”. Dessa forma, vemos que em uma situação bastante genérica, uma cosmologia de Chaplygin pode passar por diferentes fases do universo iniciando em uma fase dominada por matéria até uma era de-Sitter, passando por uma fase intermediária caracterizada pela mistura de ambas as fases. O mais interessante é que toda essa mudança é feita considerando apenas um único fluido, o que o torna um forte candidato a unificar o setor escuro do Universo e motiva nosso estudo.

3.2.1.1 Concordância com as observações da aceleração cósmica

Nesse trabalho já foi discutido algumas formas de se verificar se um modelo cosmológico é de fato bom ou não e ainda voltaremos para essa discussão na próxima seção. Entretanto, antes de fazermos isso é interessante avaliar um resultado do gás de Chaplygin na cosmologia FRW que oferece um indício para acreditarmos na validade desse modelo.

Recordando nossos cálculos da seção 3.2.1, sabemos que a eq. (3.26) corresponde a um universo dominado por matéria quando consideramos pequenos valores de a em (3.25), ao passo que para grandes valores de a a eq. (3.27) nos dá um resultado que corresponde a um universo vazio com constante cosmológica $\sqrt{A}$. O que faremos agora é notar que $\sqrt{A}$ é solução da equação

$$\rho + p = \rho - \frac{A}{\rho} = 0, \quad (3.30)$$

fato esse que é pautado na possibilidade de esse modelo ser interpretado como quintessência. A forma mais correta de estimar o valor da constante A seria comparar nossas expressões para pressão e energia com os dados disponíveis. Entretanto, existe uma forma mais rápida e simples que nos permite estimar esse parâmetro de forma indireta, o que dá um resultado satisfatório para os propósitos dessa seção.

Dessa maneira, o que faremos é assumir os valores atuais para as contribuições de matéria e da constante cosmológica para o conteúdo de densidade de energia do Universo. Para isso, é preciso decompor a pressão e a densidade de energia na forma

$$p = p_\Lambda + p_m = -\Lambda, \quad (3.31)$$

$$\rho = \rho_\Lambda + \rho_m = \Lambda + \rho_m. \quad (3.32)$$

Aplicando a eq. (3.22) ficamos com

$$A = \Lambda(\Lambda + \rho_m). \quad (3.33)$$

Assim, se a constante cosmológica contribui com 70% da energia, concluímos que $\sqrt{A} \approx 1.2 \Lambda$ (KAMENSHCHIK; MOSCHELLA; PASQUIER, 2001). Vemos que nesse contexto, uma vez que o Universo começa a acelerar ele não poderá mais desacelerar, o que fica também explicitado pela equação de Friedmann apresentada em (3.24) e pela conservação de energia, que implicam em

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}(\rho + 3p). \quad (3.34)$$

Segue-se então que o valor observado Λ da constante cosmológica irá aumentar até 1.2Λ , ou pelo menos que no passado esse valor era menor que 1.2Λ . Nosso último passo aqui será encontrar um campo escalar homogêneo $\phi(t)$ e um potencial $V(t)$ para a cosmologia de Chaplygin. Para isso, consideramos a seguinte Lagrangiana

$$L(\phi) = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (3.35)$$

e definimos a densidade de energia do campo como sendo a do próprio gás de Chaplygin, isto é,

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) = \sqrt{A + \frac{B}{a^6}}. \quad (3.36)$$

A pressão correspondente, nesse caso, equivale à densidade da Lagrangiana

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) = -\frac{A}{\sqrt{A + B/a^6}}, \quad (3.37)$$

de modo que teremos

$$\dot{\phi} = \frac{B}{a^6 \sqrt{A + B/a^6}}, \quad (3.38)$$

$$V(\phi) = \frac{2a^6(A + B/a^6) - B}{2a^6 \sqrt{A + B/a^6}}. \quad (3.39)$$

Mais uma vez, consideremos o caso plano de modo que a eq. (3.38) implica em

$$\phi' = \frac{\sqrt{B}}{a\sqrt{a^6 A + B}}, \quad (3.40)$$

onde ϕ' significa a derivada de ϕ com relação a a . A eq. (3.40) pode ser integrada de modo a obtermos

$$a^6 = \frac{4Be^{6\phi}}{A(1 - e^{6\phi})^2}. \quad (3.41)$$

Finalmente, vemos que as eqs. (3.41) e (3.39) nos fornecem o potencial

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\sqrt{A} \left(\cosh 3\phi + \frac{1}{\cosh 3\phi} \right), \quad (3.42)$$

que não depende da constante B , mas apenas da equação de estado (3.22). Dessa forma, vemos que a cosmologia de Chaplygin no caso plano oferece algumas reflexões importantes para a nossa discussão, dando uma possibilidade interessante para as atuais observações da expansão do Universo, bem como prevendo o aumento do valor da constante cosmológica.

3.2.2 Análise da viabilidade do modelo pelos parâmetros *statefinder*

Como visto na seção 2.3.1.2, é possível qualificar um modelo de diversas formas visando determinar se ele é válido ou não para o nosso estudo. Uma das formas de fazermos isso é determinando a severidade do problema da coincidência, para a qual utilizamos os parâmetros $\{\chi, s\}$ definidos na eq. (2.105). É interessante usarmos novamente esse método pois ele fornece uma forma simples e visual de validar o modelo com gás de Chaplygin.

Nesse método, as trajetórias no plano $\{\chi, s\}$ correspondem a diferentes modelos cosmológicos com comportamentos variados. O modelo Λ CDM, por exemplo, possui um diagrama com pontos fixos $\chi = 1$ e $s = 0$, ao passo que modelos de quintessência apresentam um segmento vertical com χ decrescente iniciando em $\chi = 1$ e caindo até um valor determinado. O atual valor desses parâmetros pode ser calculado por meio de modelos levando em consideração o parâmetro de desaceleração, bem como podemos utilizar dados dos experimentos SNAP (*SuperNovae Acceleration Probe*) (SAHNI et al., 2003).

Antes de iniciar nosso estudo propriamente dito, é conveniente reescrevermos as fórmulas dos parâmetros *statefinder*. Dessa forma, consideramos a equação de Friedmann para um universo plano, isto é,

$$H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \rho \quad (3.43)$$

e a conservação de energia

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p). \quad (3.44)$$

Com essas duas equações podemos calcular o parâmetro de desaceleração q , isto é,

$$q = \frac{1}{2} + \frac{3p}{2\rho}, \quad (3.45)$$

de modo que nossos novos parâmetros serão

$$\chi = 1 - \frac{3\dot{p}}{2\rho\sqrt{\rho}} \quad \text{e} \quad s = -\frac{\dot{p}}{3p\sqrt{\rho}}. \quad (3.46)$$

Para efeitos de comparação, vamos considerar primeiramente um modelo simplificado e iremos crescendo sua complexidade até um modelo mais realista. Dessa forma,

iniciamos considerando um modelo de fluido com uma única componente, de modo que

$$\chi = 1 + \frac{9}{2} \left(1 + \frac{p}{\rho}\right) \frac{\partial p}{\partial \rho} \quad \text{e} \quad s = \left(1 + \frac{\rho}{p}\right) \frac{\partial p}{\partial \rho}. \quad (3.47)$$

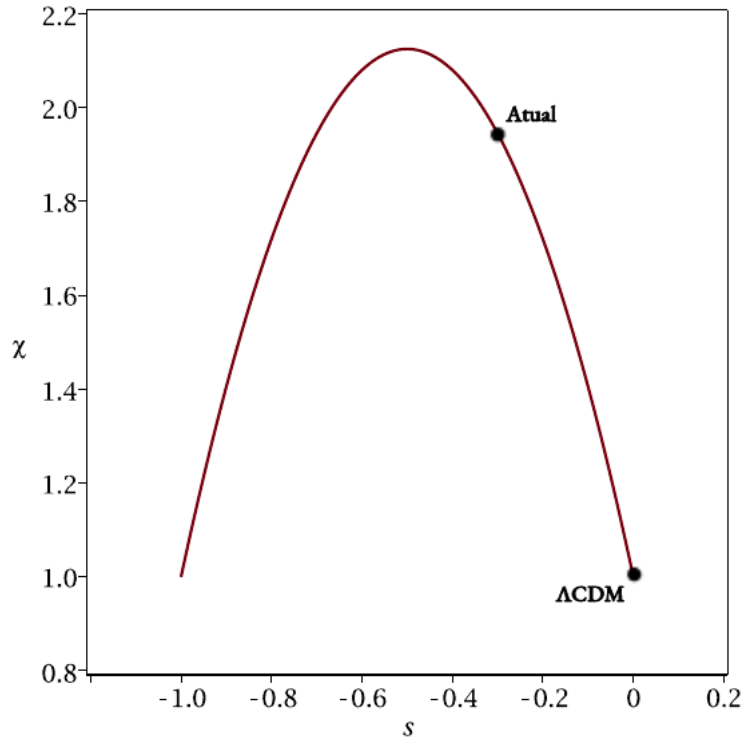
Podemos ainda escrever χ em termos de s se levarmos em conta que o quadrado da velocidade do som para o gás de Chaplygin é simplesmente $v_s^2 = \partial p / \partial \rho$, que nos dá $v_s = 1 + s$. Dessa forma, temos que

$$\chi = 1 - \frac{9}{2} s(1 + s). \quad (3.48)$$

Essa equação nos mostra que a curva de $\chi(s)$ é um arco de parábola. Para encontrarmos os possíveis valores de s é preciso notar que as eqs. (3.22), (3.43) e (3.44) estabelecem uma dependência da densidade de energia em função do fator de escala que foi apresentada em (3.25). Portanto,

$$v_s^2 = 1 + s = \frac{A}{A + B/a^6}. \quad (3.49)$$

Figura 6 – Diagrama de evolução χ - s para o gás de Chaplygin puro.



Fonte: Autor.

Vemos então que, quando o fator de escala a varia de 0 para ∞ , a velocidade do som varia de 0 a 1 e s varia de -1 a 0. Dessa forma, esse modelo prevê que s assuma valores negativos, o que difere de outros modelos de quintessência considerados por SAHNI et al..

Considerando essa variação de s no intervalo $[-1,0]$, vemos que χ começa em 1 e cresce até atingir seu máximo e depois decresce para o valor dos pontos do modelo Λ CDM, como pode ser visto na Figura 6. Se considerarmos $q \approx -0.5$ veremos que os valores atuais para os parâmetros *statefinder* seriam $\chi \approx 1.9$ e $s \approx -0.3$ (KAMENSHCHIK; MOSCHELLA; PASQUIER, 2001). Dessa forma, podemos perceber que o modelo considerado está fora do intervalo de confiança quando comparado com o modelo Λ CDM, de modo que dados futuros dos experimentos SNAP serão capazes de discernir entre os dois modelos.

Isso nos leva a buscar um modelo mais realista que contenha tanto a componente de Chaplygin quanto a componente de matéria. Assim, considerando um fluido com duas componentes, as eqs. (3.46) assumirão a forma

$$\chi = 1 + \frac{9}{2(\rho + \rho_1)} \left[\frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho + p) + \frac{\partial p_1}{\partial \rho_1}(\rho_1 + p_1) \right], \quad (3.50)$$

$$s = \frac{1}{p + p_1} \left[\frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho + p) + \frac{\partial p_1}{\partial \rho_1}(\rho_1 + p_1) \right]. \quad (3.51)$$

Como o primeiro fluido é matéria, temos que $p_1 = p_d = 0$, o que simplifica as equações acima. Ademais, como o segundo fluido é o gás de Chaplygin, podemos proceder como já fizemos na consideração de apenas uma componente, de modo a obtermos

$$\chi = 1 - \frac{9}{2} \frac{s(s+1)}{1 + \rho_d/\rho}. \quad (3.52)$$

O termo ρ_d/ρ que foi adicionado pode ser encontrado considerando a dependência da densidade de matéria com relação ao fator de escala, isto é,

$$\rho_d = \frac{C}{a^3}, \quad (3.53)$$

onde C é uma constante positiva. Ademais, a eq. (3.49) nos diz que $Aa^6 + B = -B/s$, de modo que

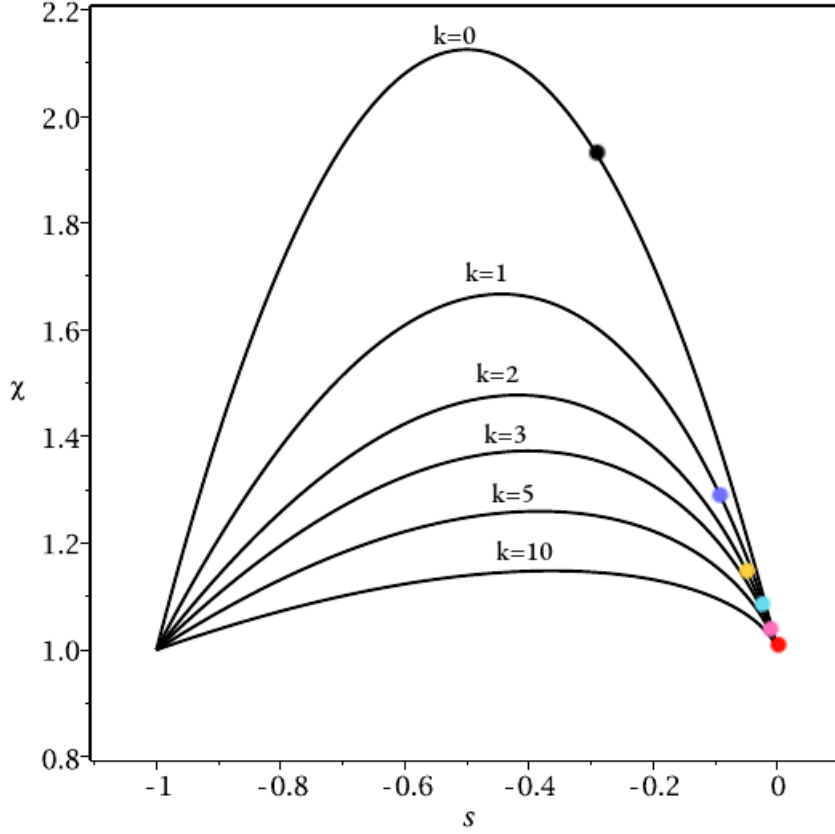
$$\frac{\rho_d}{\rho} = \frac{C}{\sqrt{Aa^6 + B}} = k\sqrt{-s}, \quad (3.54)$$

com a constante $k = C/\sqrt{B}$ sendo a razão entre as densidades de energia de matéria e do gás de Chaplygin no começo da evolução do Universo. Assim,

$$\chi = 1 - \frac{9}{2} \frac{s(s+1)}{1 + k\sqrt{-s}}. \quad (3.55)$$

Dessa maneira, a escolha de k altera a qualidade do nosso modelo, como mostra a Figura 7. É simples vermos que para $k = 0$ reproduzimos o resultado já apresentado anteriormente na Figura 6, ao passo que para $k = 2$ temos $\chi = 1.11$ e $s = 0.035$. Podemos ver que para $k \geq 5$ os parâmetros *statefinder* coincidem com os pontos do modelo Λ CDM, de modo que seria muito difícil discriminar entre esse modelo e o nosso modelo com dois fluidos, considerando uma escolha apropriada de k (KAMENSHCHIK; MOSCHELLA; PASQUIER, 2001).

Figura 7 – Diagrama de evolução χ - s para o gás de Chaplygin misturado com matéria, onde os valores atuais dos parâmetros *statefinder* estão representados pelos pontos.



Fonte: Autor.

Obviamente esses resultados devem ser comparados com os dados disponíveis para avaliar realmente a validade dos modelos propostos. Com esse intuito, uma análise de dados provenientes de 26 supernovas feita por [FABRIS; GONCALVES; SOUZA](#) apontam que o modelo que melhor adequa os dados é o gás de Chaplygin sem a presença da componente de matéria. Todavia, a combinação de dados de 92 supernovas com restrições de crescimento de perturbação de densidade apresentadas por [AVELINO et al.](#) apontam que a componente de Chaplygin consegue mimetizar a constante cosmológica padrão assumindo $\Omega_m \sim 0.3$ para matéria. É evidente que novas observações e outras técnicas de diagnóstico são necessárias para avaliar mais profundamente os modelos, mas uma das vantagens do gás de Chaplygin é ser capaz de sugerir uma solução para o problema da coincidência, uma vez que a densidade de energia de matéria e do gás podem ter a mesma ordem de grandeza.

3.2.2.1 Gás de Chaplygin generalizado

Tendo visto um primeiro modelo simplificado, é interessante analisarmos as conclusões que podemos tirar de um modelo mais generalizado. Esse modelo é obtido fazendo

uma pequena modificação na equação de estado (3.22), resultando em

$$p = -\frac{A}{\rho^\alpha}, \quad (3.56)$$

com $0 \leq \alpha \leq 1$. Esse modelo nos dá uma evolução que se inicia com um comportamento tipo matéria até uma constante cosmológica assintótica, passando por um período que pode ser interpretado como uma mistura da constante cosmológica com um fluido que segue a equação de estado $p = \alpha\rho$, com $\alpha = 0$ correspondendo ao modelo Λ CDM.

Como de costume, podemos estudar a relação da eq. (3.56) com o fator de escala. Considerando a conservação de energia dada em (3.44), temos que

$$\rho = \left[A + \frac{B}{a^{3(1+\alpha)}} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}}. \quad (3.57)$$

Ademais, temos que o quadrado da velocidade do som nesse caso assume a forma

$$v_s^2 = \frac{A\alpha}{A + B/[a^{3(1+\alpha)}]}, \quad (3.58)$$

variando de 0 a α . Da eq. (3.47) podemos ver que $s = v_s^2 - \alpha$, de modo que os valores possíveis para s estão no intervalo $[-\alpha, 0]$. Além disso, essa equação nos diz ainda que

$$\chi = 1 - \frac{9}{2} \frac{s(s + \alpha)}{\alpha}. \quad (3.59)$$

Mais uma vez, escolhemos o parâmetro de desaceleração como sendo $q \approx -0.5$, de modo que os valores dos parâmetros *statefinder* assumem a forma

$$\chi \approx 1 + 0.9\alpha \quad \text{e} \quad s \approx -0.3\alpha. \quad (3.60)$$

De fato, para pequenos valores de α , o modelo do gás de Chaplygin generalizado é indistinguível do modelo Λ CDM. Podemos dar mais um passo adiante e considerar um modelo com duas componentes, como fizemos anteriormente, porém agora consideraremos que uma das componentes é o gás generalizado apresentado. Utilizando as equações já apresentadas para o modelo de duas componentes podemos encontrar uma generalização da eq. (3.55), isto é,

$$\chi = 1 - \frac{9s(s + \alpha)}{2\alpha(1 + k(-s)^{1/(1+\alpha)}/\alpha^{1/(1+\alpha)})}, \quad (3.61)$$

onde o parâmetro k também representa a razão entre a densidade de energia de matéria e do gás de Chaplygin generalizado no início da expansão cósmica. Esse modelo foi posto à prova por MAKLER; OLIVEIRA; WAGA, analisando os dados de 62 supernovas. Os resultados indicam que o modelo com gás generalizado é consistente com os dados atuais para qualquer valor de α no intervalo de $0 \leq \alpha \leq 1$, embora os valores de $\alpha \sim 0.4$ sejam favorecidos.

4 Conclusão

Nesse trabalho estudamos alguns modelos cosmológicos alternativos visando solucionar os principais problemas deixados pelo Modelo Padrão. Dentre esses modelos, analisamos aqueles nos quais matéria e energia escuras interagem, considerando primeiramente a evolução separada dessas duas quantidades e, posteriormente, adotando a visão de fluido unificado. Isso porque a primeira consideração nos leva a outros problemas que parecem ser resolvidos por uma teoria em que matéria e energia escuras evoluem como uma só quantidade: um fluido unificado.

Dessa forma, consideramos então duas ações distintas e aplicamos o formalismo ADM para obter as equações de movimento, a partir das quais encontramos a equação de estado ω_U do fluido unificado. Tanto a primeira ação quanto a segunda nos levaram a parâmetros de estado que evoluem com o tempo. Em ambos os casos é possível transicionar de um universo dominado por matéria para um universo acelerado, dominado por um ω_U negativo. Essas interpretações se devem ao fato de o setor escuro possuir pouca informação observacional, o que nos dá grande liberdade para criar modelos cosmológicos que expliquem os dados disponíveis.

Por fim, estudamos um outro modelo de fluido utilizando o gás de Chaplygin, cuja equação de estado nos mostrou novas formas de abordar a unificação do setor escuro. Esse modelo também nos ofereceu uma possibilidade de transicionar entre as diferentes épocas do universo, passando pelo dominado por matéria até o universo acelerado que observamos atualmente. Além disso, a utilização dos parâmetros *statefinder* permitiu uma comparação com o modelo de maior sucesso observacional, o Λ CDM. Essa comparação mostrou que, escolhendo apropriadamente a razão entre as densidades de energia de matéria e do gás de Chaplygin no começo da evolução do Universo, torna-se muito difícil discriminar entre o modelo com o gás e o modelo Λ CDM.

Assim, podemos ver que as duas possibilidades exploradas para explicar o comportamento acelerado da expansão do Universo são bastante válidas, cada uma oferecendo uma explicação satisfatória dentro do limite de suas suposições. É importante ressaltar que nossa manipulação do lado esquerdo das equações de Einstein baseou-se fortemente na escolha de uma ação, o que oferece grande margem para alteração. Como vimos na seção 3.1, uma pequena modificação na ação pode nos levar a um modelo completamente novo, o que é interessante do ponto de vista cosmológico porque nos oferece ampla possibilidade de estudo, porém introduz uma certa incerteza na escolha de uma ação apropriada. O modelo do gás de Chaplygin, por sua vez, não possui essa margem de alteração, dependendo apenas da quantidade de componentes que consideramos. Ademais, a manipulação do gás

generalizado nos gerou resultados semelhantes aos considerados para poucas componentes, se mostrando muito promissor quando comparado com os dados disponíveis. Assim, é possível ver que o gás de Chaplygin se mostra, de fato, um forte candidato a unificar o setor escuro do Universo na busca por uma explicação para seu comportamento acelerado.

Referências

- ARNOWITT, R.; DESER, S.; MISNER, C. W. Republication of: The dynamics of general relativity. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 40, n. 9, p. 1997–2027, 2008. Citado na página [41](#).
- AVELINO, P. et al. Alternatives to quintessence model building. *Physical Review D*, APS, v. 67, n. 2, p. 023511, 2003. Citado na página [62](#).
- BABICHEV, E.; CHARMOUSIS, C. Dressing a black hole with a time-dependent galileon. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2014, n. 8, p. 106, 2014. Citado 2 vezes nas páginas [49](#) e [52](#).
- BENTO, M.; BERTOLAMI, O.; SEN, A. A. Generalized chaplygin gas, accelerated expansion, and dark-energy-matter unification. *Physical Review D*, APS, v. 66, n. 4, p. 043507, 2002. Citado na página [56](#).
- BOJOWALD, M. *Canonical gravity and applications: cosmology, black holes, and quantum gravity*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. Citado 2 vezes nas páginas [42](#) e [43](#).
- CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019. Citado 2 vezes nas páginas [27](#) e [28](#).
- CHAPLYGIN, S. A. *Gas jets*. [S.l.]: National Advisory Committee for Aeronautics, 1944. Citado na página [55](#).
- FABRIS, J. C.; GONCALVES, S.; SOUZA, P. D. Fitting the supernova type ia data with the chaplygin gas. *arXiv preprint astro-ph/0207430*, 2002. Citado na página [62](#).
- GUTH, A. H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Physical Review D*, APS, v. 23, n. 2, p. 347, 1981. Citado na página [31](#).
- KAMENSHCHIK, A.; MOSCHELLA, U.; PASQUIER, V. An alternative to quintessence. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 511, n. 2-4, p. 265–268, 2001. Citado 4 vezes nas páginas [55](#), [56](#), [58](#) e [61](#).
- KOUTSOUMBAS, G. et al. Unification of dark matter-dark energy in generalized galileon theories. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2018, n. 02, p. 003, 2018. Citado 2 vezes nas páginas [49](#) e [51](#).
- LINDE, A. D. A new inflationary universe scenario: a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 108, n. 6, p. 389–393, 1982. Citado na página [31](#).
- MAKLER, M.; OLIVEIRA, S. Q. de; WAGA, I. Constraints on the generalized chaplygin gas from supernovae observations. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 555, n. 1-2, p. 1–6, 2003. Citado na página [63](#).
- SAHNI, V. et al. Statefinder—a new geometrical diagnostic of dark energy. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, Springer, v. 77, n. 5, p. 201–206, 2003. Citado 3 vezes nas páginas [40](#), [59](#) e [60](#).

SCHUTZ, B. *A first course in general relativity*. [S.l.]: Cambridge university press, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.

SHAHIDI, S. Cosmology of a higher derivative scalar theory with non-minimal maxwell coupling. *The European Physical Journal C*, Springer Science and Business Media LLC, v. 79, n. 6, 2019. Nenhuma citação no texto.

WANG, B. et al. Dark matter and dark energy interactions: theoretical challenges, cosmological implications and observational signatures. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 79, n. 9, p. 096901, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 36, 39, 40 e 41.

WEINBERG, S.; DICKE, R. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. [S.l.]: Wiley New York, 1973. Citado na página 25.